

वैदिक गणित शास्त्र

डॉ० एम० एल० व्यास

संगल प्रकाशन

गोविन्द राजियों का रास्ता

जयपुर - १

प्रकाशक

समरावसिंह मंगल

संचालक

मंगल प्रकाशन

गोविन्द राजियों का रास्ता,

जयपुर - १

प्रथम संस्करण

१९८४

मूल्य — ३०-०० (तीस रुपये मात्र)

मुद्रक

मगन प्रेस, जयपुर

समर्पण

श्री पितृ मातृ चरणेषु

पूज्य पिताजी पं० गोवर्धन जी व्यास

व

आदरणीया माता जी श्रीमती सरस्वती देवी व्यास

को

सादर समर्पित

विषयानुक्रम

प्राक्कथन	५ - ७
दो शब्द	- ८
भूमिका	१ - १५
संविनाशराजतिका	- १६
विषय प्रवेश	१७ - २६
द्वयगणित	२७ - ४८
रेखा गणित	४९ - ६४
बीज गणित	...	६५ - ७३
वैदिककालीन मेघन कला	...	७४ - ८०

प्राक्कथन

वैदिक गणित शास्त्र का प्राक्कथन लिखने में मैं हर्ष का अनुभव करता हूँ। विद्वान् लेखक ने अपने गहन अध्ययन के आधार पर प्रमाणित किया है कि वैदिक काल में भाषों ने गणित के क्षेत्र में पर्याप्त प्रगति कर ली थी। ग्रन्थ की विषय वस्तु का परिचय देते हुए लेखक ने भूमिका में कहा है—“पुस्तक की पाँच अध्यायों में विभक्त किया गया है। प्रथम अध्याय में वैदिक साहित्य का संक्षिप्त परिचय है। साथ ही भाषों को गणित की आवश्यकता किम रूप में और क्यों थी, यह बताने का प्रयास किया गया है। दूसरे अध्याय में घन गणित में सम्बन्धित सिद्धान्तों, तीसरे में रेखा गणित के सिद्धान्तों-तात्त्व एवं रचनाओं (Theorems and Constructions) तथा चतुर्थ अध्याय में बीजगणित के मूलभूत सिद्धान्तों (Fundamental Principles) का वर्णन किया गया है। अन्तिम अध्याय में उन विद्वानों की भूमिका का निवारण किया गया है, जो यह कहते हैं कि भार्य लिखना नहीं जानते थे। उन्हें यह बताया गया है कि भार्य ऋग्वेदिक काल (पूर्व वैदिक काल से ही लेखन कला (Art of Writing) से परिचित थे।”

ग्रन्थ की भूमिका लेखक के विस्तृत अध्ययन को प्रमाणित करती है। लेखक ने पारश्वात्य एवं पौर्वात्य दोनों ही क्षेत्रों के विद्वानों के वेदों की पुरातनता विषयक विचारों तथा हिन्दुओं की गणित—घन गणित, रेखा गणित तथा बीज गणित—विषयक देन से सम्बन्धित विचारों को प्रस्तुत किया है। मैं एक दो घंटा प्रमाण के रूप में और जोड़ना चाहूँ। एक विगिष्ट जर्मन गणितज्ञ तथा अन्वेषक फेलिक्स क्लेन Felix Klein) ने अपने ‘घन गणित, बीज गणित एवं विश्लेषण’ विषयक व्याख्यान में कहा है—हमें प्रासंगिक रूप से ध्यान देना चाहिए कि विज्ञान कि अन्य शक्तों के समान “अमेरिकी घंटा” भी घण्टा है। इस लेखन प्रणाली का आविष्कार अरबों ने नहीं, हिन्दुओं ने किया था। फिर एक अमेरिकी दार्शनिक एवं इतिहासकार विल डुरांट (Will Durant) ने अपनी “सभ्यता की कहानी” में कहा है, “हिमालयीय भयरोध के पार भारत ने हमें व्याकरण एवं तर्कशास्त्र, दर्शन एवं नीति कला, सम्बोहिनी विद्या तथा घातर्ज तथा इससे भी बढ़कर हमारे घंटा तथा हमारी दार्शनिक प्रणाली जैसी देन दी है।

जो पाठक मस्त्रुत से परिचित नहीं हैं, उन्हें लेखक के प्रति कृतज्ञ होना चाहिये क्योंकि उन्होंने विगिष्ट वैदिक भाषा में बँड जान उन्हें उत्सव्य कराया है। उन्हें भण्डारकर प्राच्य मोव संस्थान के शोध पत्र के अंक २७ मन् १९५६ भाग १ व

२ में प्रकाशित एक लेख के अध्ययन में भी विशेष आनन्द की अनुभूति होगी । उसमें कटपयादि प्रणाली की व्याख्या है जिनने आर्यों को लम्बे अंक सूत्र ज्ञात करने तथा छन्द के द्वारा निष्कर्ष निकालने की योग्यता प्रदान की । निम्न तालिका से ज्ञात होगा कि १, २, ३, ७, ८, ९, ० अंक किस प्रकार एक अक्षर द्वारा व्यक्त होते थे ।

कटपयादि प्रणाली

कादि	क	ख	ग	घ	ङ	च	छ	ज	झ	ञ
टादि	ट	ठ	ड	ढ	ण	त	थ	द	ध	न
पादि	प	फ	ब	भ	म	—	—	—	—	—
यादि	य	र	ल	व	श	ष	स	ह		
	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०

व्याख्या :—प्रत्येक अंक अपने सम्बन्धित कॉलम के किसी भी अक्षर से व्यक्त किया जा सकता है । इस प्रकार १ को क अथवा ट अथवा प अथवा य द्वारा तथा ० को झ अथवा न द्वारा व्यक्त किया जा सकता है ।

सद्मन्मन्त्र नामक एक संस्कृत ग्रन्थ में ॥ (पाई) का मुख्य शुद्ध रूप से दशमलय के सत्रह स्थानों तक निम्न पंक्ति के द्वारा दे दिया गया है—

यद् मद्राम्बुधि तिष्ठ जन्म गलित आहारम यद् भूपगोः

उक्त तालिका द्वारा इसी व्याख्या कैसे की जाय ? इसका नियम यह है—

नञावत्तरय शून्यानि संख्याः कटपयादयः

मिथे तूपाग्त हल् सं या, न च चिन्त्यो हलस्वरः

अर्थ :—न तथा ञ शून्य को प्रकट करते हैं । कटपयादि तालिका अन्य ध्वनों को व्यक्त करती है । सयुक्त अक्षर में स्वर से पूर्व के व्यंजन को ही लिया जाय । स्वर रहित व्यंजन पर्यान् हल व्यंजन को नहीं लिया जाय पर्यान् छोड़ दिया जाय ।

इस प्रकार इस सिद्धान्त को सुन में आये हुए संयुक्त व्यंजनों पर इस प्रकार लागू किया जाएगा ।

द्र में र	को ही	लिया	जायगा,	जो	व्यक्त	करता	है	२
म्बु में ब	" "	" "	" "	" "	" "	" "	" "	३
ड में घ	" "	" "	" "	" "	" "	" "	" "	४
म्ब में म	" "	" "	" "	" "	" "	" "	" "	५
श्म में श	" "	" "	" "	" "	" "	" "	" "	५
द्वु में व	" "	" "	" "	" "	" "	" "	" "	५
घोर इस प्रकार								५

यद मद्राम्बुधि सिद्ध जन्म गणित आ द्वाश्य यद्भूपगो
४ २ ३ ६ ७ ६ ८ ५ ३ ५ ६ २ ६ ५ १ १ ४ ३

आधुनिक पद्धति के अनुसार जब उक्त अंकों को विपरीत क्रम में लिखा जायगा, तो हमें ११ (पाई) का निम्न मूल्य ज्ञात होगा—

३.१४१, ५६२, ६५३, ५८६, ७६३, २४

इसमें निश्चित रूप से दशमलव बिन्दु हमें लगाना होगा ।

अन्तिम अध्याय में यह मान्यता स्थापित की गई है कि आर्यों को लेखन कला का ज्ञान था । लेखक अपने इस पर्यवेक्षण के आधार पर अध्याय को आरम्भ करता है, "वर्तमान में पढ़ाई जाने वाली भारतीय इतिहास की अधिकांश पाठ्य पुस्तकों में इसी बात को दोहराया गया है कि आर्य लिखना नहीं जानते थे ।" इसके उपरान्त लेखक ठोस प्रमाण देता हुआ आगे बढ़ता है तथा इस निष्कर्ष पर पहुँचता है, "इन प्रमाणों के प्रकाश में यह मानने में कोई आपत्ति नहीं होनी चाहिये कि वैदिक काल में लेखन कला का प्रचार था ।"

पूरी पुस्तक में लेखक ने अत्यन्त सावधानी पूर्वक विशिष्ट सन्दर्भों के आधार पर अपनी मान्यताएँ प्रस्तुत की हैं । अन्त में उन्होंने पठनीय प्रामाणिक सामग्री भी दी है । मैं उन्हें हार्दिक बधाई देता हूँ ।

कुछ शब्द

“वेद सब सत्य विद्याओं की पुस्तक है” इस तथ्य की घोषणा कर महर्षि दयानन्द ने वैदिक साहित्य में निहित और गणित विज्ञान के शाश्वत सत्यों की खोज करने की प्रेरणा दी थी। यह बड़े हर्ष का विषय है कि डॉ० मंगीलाल व्यास भयंकर ने वैदिक साहित्य में गणित शास्त्र के उल्लेख एवं विवेचन का मामिक विश्लेषण प्रस्तुत किया है। ज्योतिष को वेद का अंग माना गया है और गणित ज्योतिष विषयक अनेक सिद्धान्त मूलतः वैदिक संहिताओं में पाये जाते हैं। इस प्रकार इस विषय पर शोध एवं अनुसंधान की अपार सम्भावनाएँ हैं।

आर्यों में प्रचलित यज्ञ प्रक्रिया, वेदों का निर्माण, खगोल-शास्त्र विषयक धारणाएँ, ग्रहों की गति से सम्बन्धित बातें ये सभी गणितशास्त्र से सम्बन्धित हैं। प्राचीन शुल्ब सूत्रों में भी इसी विषय को स्फुट किया गया है। अभी तक वैदिक गणित से सम्बन्धित कोई ग्रन्थ राष्ट्रभाषा में प्रकाशित नहीं हुआ था। डॉ० भयंकर का यह प्रयास प्रारम्भिक होने पर भी ऐतद् विषयक नवीन आयामों को उद्घाटित करने की प्रेरणा देगा, इसी विश्वास के साथ मैं लेखक के प्रयास की प्रशंसा करता हूँ।

डॉ० भवानी लाल भारतीय
अध्यक्ष एवं प्रोफेसर,
दयानन्द अनुसंधान पीठ,
पंजाब विश्वविद्यालय, चण्डीगढ़

भूमिका

वेद विश्व वांगमय की प्राचीनतम ज्ञान-निधि है, जिसमें मानव सलभ ज्ञान की सम्पूर्ण विधाएँ समाहित हैं। कतिपय लेखक वेदों को मात्र ग्रन्थों की धर्म-पुस्तक स्वीकार करते हैं। उनका तर्क है कि इनमें विभिन्न देवी-देवताओं की उपासनाओं के भन्न सकलित है। किन्तु प्रगर तटस्थ दृष्टि से वेद संहिताओं का सर्वाङ्गीण व विश्लेषणात्मक अध्ययन किया जाय तो ज्ञात होगा कि इनमे ससस्त भौतिक एवं आध्यात्मिक ज्ञान-विधाओं का व्यवस्थित संग्रह है। स्वयं वेद शब्द का शाब्दिक अर्थ “ज्ञान-संग्रह” है। प्राचीन एवं अर्वाचीन हिन्दु धन साहित्य के अतिरिक्त जैनो, बौद्धों व सिक्खो के धर्म ग्रन्थों में भी वेद-वांगमय की महत्ता का स्पष्ट उल्लेख है। अधिकांश पाश्चात्य विद्वान् भी वैदिक-ज्ञान की सत्यता एवं महत्ता को स्वीकार करते हैं। जब वास्टेपर नामक यूरोपीय विद्वान को यजुर्वेद संहिता उपहार स्वरूप भेंट की गई तो उसने इसे स्वीकार करते हुए बताया कि “इस मूल्यवान उपहार के लिए पश्चिम सदा पूर्व का ऋणी रहा है।” जर्मन विद्वान मैक्समूलर ने इसे मानव जाति की शिक्षा के अध्याय का सूत्रपात करने वाला अत्यन्त दुर्लभ^१ तथा विश्व इतिहास के बहुत बड़े अभाव की पूर्ति करने वाला^२ साहित्य कहा है। लिप्पोन डेबल्स ने ऋग्वेद को यूनान के प्राचीनतम अवशेष से भी श्रेष्ठतम भारतीय अवशेष के रूप में स्वीकार किया है।^३ इसी प्रकार कीप, मेकडानल, वेबर, ग्रीफ़िथ प्रमृति पाश्चात्य विद्वानों ने भी वेदों के अतुल ज्ञान एवं प्रकाट्य प्रमाणों को हृदयंगम किया है।

वेदों का निर्माण काल—इस महत्त्वपूर्ण ज्ञान निधि के निर्माण का प्रश्न बड़ा विवादास्पद रहा है। विविध पौराण्य व पाश्चात्य विद्वानों ने इस सम्बन्ध में विभिन्न दृष्टिकोण प्रस्तुत किए हैं :—

मैक्समूलर—इनका कहना है कि वेदों के आरम्भिक काल का पता लगाना सरल कार्य नहीं है, कदाचित ही कोई व्यक्ति इस तथ्य का पता लगा सके कि वास्तव में इनका निर्माण कब हुआ ? फिर भी “सिफ़ेड बक्स आफ द ईस्ट” नामक पुस्तक भाला के अन्तर्गत ऋग्वेद-संहिता का प्रकाशन करते समय इन्होंने इसका निर्माण काल

१ - Willson's Essays, Vol. III, P. 304.

२ - Maxmular—India : What Can it teach us, P. P. 78-79.

३ - Willson's Essays, Vol III, P. 339.

४ - लिप्पोन डेबल्स द्वारा १४ जुलाई सन् १८८४ को वेनरेथल विस्टर ड्यूगो की अध्यक्षता में आयोजित अन्तर्राष्ट्रीय-सहित्य-परिषद में पठित निबन्ध।

अनुमानता १२०० ई० पू० मतलब है, इसी काल सीमा को कौल ब्रूक, कीच, विलसन आदि पाश्चात्य विद्वानों ने भी स्वीकार किया है ।

आर्क विशप प्राट—बाईबिल के अनुसार सृष्टि रचना का आधार मानते हुए आर्क विशप प्राट ने वेदों का निर्माण-काल २००० ई० पू० माना है ।^१ श्रीर अपने मत के समर्थन से कहा है कि बाईबिल के अनुसार सृष्टि की रचना ६००० से ७००० ई० पू० वर्षों के मध्य किसी समय हुई थी । इसके बाद ही अन्य वस्तुओं का निर्माण हुआ है ।

जैकोबी—इन्होंने ज्योतिष को आधार मानकर वेदों का निर्माण काल ६५०० वर्ष पूर्व माना है । कल्प-सूत्र के "ध्रुव हम स्थिराभव" वाक्य के आधार पर जैकोबी ने उस समय ध्रुव तारे को स्थिर व अधिक चमकीला माना है । यह स्थिति ईसा से ४७०० वर्षों पूर्व की है इसी को आधार मानकर इन्होंने कल्प-सूत्रों का निर्माण काल ४७०० वर्ष पूर्व तथा वेद मन्त्रों में आये हुए ग्रहों व नक्षत्रों की स्थिति के आधार पर वेदों का निर्माण-काल ६५०० वर्ष पूर्व माना है ।

लोकमान्य तिलक—ज्योतिष को ही आधार मानकर लोक मान्य बाल गंगाधर तिलक वेदों का निर्माण ८५०० वर्ष पूर्व मानते हैं । इनका कहना है कि मन्त्र संहिताओं के काल में नक्षत्रों की गणना मुगशिरा से होती थी । मुगशिरा को उस समय पहला नक्षत्र माना जाता था व इस नक्षत्र के सूर्य में दिन व रात बराबर अवधि के होते थे । खगोल व ज्योतिष के अनुसार यह स्थिति ६५०० वर्ष पूर्व थी, साथ ही इन मन्त्र संहिताओं के निर्माण का क्रम इससे भी २००० वर्ष पहले से चल रहा था, मतः उनके अनुसार वेदों का निर्माण ८५०० वर्ष पहले हुआ था ।

नारायण भवन राव पावगी—भूगर्भ शास्त्र को आधार मानकर वेदों में वर्णित सामग्री के अनुसार पावगी महोदय ने वेदों का निर्माण काल ८००० वर्ष पूर्व माना है ।

अमलनेरकर—वेदों में वर्णित मृद्वो, नदियों, भूखण्डों आदि का भूगर्भ शास्त्रीय अध्ययन कर अमलनेरकर भी इस निष्कर्ष पहुँचे कि वेदों की रचना ६९०० वर्ष-पूर्व हुई थी ।

यूनानी लेखकों का विवरण—सिकन्दर के आक्रमण के समय अनेक यूनानी लेखक भारत आये थे, भारत में आकर उन्होंने अन्य कार्यों के साथ-साथ भारतीय राजाओं की वंशावलि या भी एकत्रित की थी । उन वंशावलियों के आधार पर चन्द्र-गुप्त मौर्य के समय तक १५३ राजवंश ६०४३ वर्ष तक शासन कर चुके थे । इस शासन समय के बहुत पहले ही वेदों का निर्माण हो चुका था । यूनानी लेखकों के इसी विवरण के आधार पर विद्वानों ने वेदों का निर्माण ८००० वर्ष पूर्व ठहराया है ।

अविनाश चन्द्र दास—इन्होंने बताया कि वेदों का निर्माण ७५०० वर्ष पहले हो गया था ।

वेदों के निर्माण काल के प्रश्न पर और भी अनेक विद्वानों ने अपने विचार व्यक्त किये हैं, किन्तु, दृष्टिकोण की भिन्नता के कारण किसी एक सर्वमान्य समय पर विद्वान् एक मत नहीं हो सके हैं फिर भी भारत के लिए सौभाग्य की बात है कि विश्व की प्रथम गौरवपूर्ण साहित्यिक कृति के रूप में वेद ही स्वीकृत किये गये हैं, जो आज भी हमारी प्राचीन सांस्कृतिक चेतना की स्वर्णिम धरोहर है ।

वेदों की विषय सामग्री—वेद सचित ज्ञान राशि के बृहद् कौश है, जिनमें भारतीय धर्म जाति का तत्कालीन वैभव संग्रहीत है, इनकी विषय सामग्री इतनी व्यापक है कि वर्तमान की मधुर्ण वैज्ञानिक प्रगति इनमें तिरोहित हो जाती है । यह एक तथ्यपूर्ण सत्य है जिसकी पुष्टि छान्दोग्य उपनिषद् की निम्न बातों से होती है—

एक बार नारद सनत्कुमार के पास ब्रह्म-विद्या प्राप्त करने हेतु गये । सनत्कुमार ने नारद से प्रश्न किया कि सब तक तुम कौन कौन सी विद्याओं का अध्ययन कर चुके हो ? इस पर नारद ने बताया कि :—

ऋग्वेदं भगवोऽप्येमियजुर्वेदं सामवेदमाथर्वणं
 अनुर्धममितिहास पुराणं पंचमं वेदानां वेदं पित्र्यम्
 राशि ईषं निर्ध-वाकोवाक्यमेकाग्रं देवविद्या
 ब्रह्मविद्या भूत विद्या सत्र विद्या नक्षत्र विद्या
 सप्तदेवजा विद्यामेतद्भगवोऽप्येभिः ॥ — छान्दोग्य उपनिषद्, ७।१।२ ।

अर्थात्—हे भगवान् ! मैं ऋग्वेद, यजुर्वेद, सामवेद, अथर्ववेद, इतिहास, पुराण, व्याकरण, पितृविद्या, राशि विद्या (Mathematics), देवविद्या, निष्पविद्या (Mining Engineering), तर्क शास्त्र (Logic) ब्रह्मविद्या (Spiritual Science), भूत विद्या, सत्र विद्या (Military Science) नक्षत्र विद्या (Astrology) सप्तविद्या, देवजन विद्या आदि पढ़ा हूँ ।

उस समय छः वेदानों—क्रमशः शिक्षा, कल्प, निष्कृत, छन्द, ज्योतिष व व्याकरण तथा चार उपवेदों—क्रमशः गायत्र्यवेद (Music) आयुर्वेद (Medical Science) धनुर्वेद (Archeryship or the Military Science) व अथर्ववेद (Economics) का भी अध्ययन होत । था । इस प्रकार उस समय की विषय सामग्री आज की तुलना में वही अधिक विस्तृत एवं व्यापक थी, साथ ही उसका वर्गीकरण भी वैज्ञानिक था । आज तो इनमें से अनेक (देव विद्या, ब्रह्म विद्या, भूत विद्या, सप्त विद्या आदि) विद्याओं का या तो सौं हो चुका है अथवा इनका निरन्तर ह्रास हो रहा है । गलित विद्या का तो उस समय इतना अधिक विकास हो चुका था कि वर्तमान का गणित शास्त्र पूर्णरूपेण इस पर ही आधारित लगता है ।

वेदों में गणित—प्रस्तुत पुस्तक का उद्देश्य वेदों में वर्णित गणित शास्त्र—इसी विकसित स्वरूप का परिचय कराना है। उस समय गणित शास्त्र का सर्वोच्च स्थान था। वेदांग ज्योतिष में कहा गया है कि “जिम प्रकार मयूर के निर पर सिखा सर्वोच्च स्थान पर होती है व नाग (के मुँह) में मणि का जो महत्व है वही महत्व वेदांग शास्त्रों में गणित का है :—

यथा शिला मयूराणां नागानां मणयो यथा

तद्वद् वेदांगशास्त्राणां गणितं मूर्धनि स्थितम् ॥

परवर्ती साहित्य में इसी प्रकार गणित को अनेक प्रशस्तियाँ मिलती हैं, किन्तु डा० केजरी द्वारा लिखित “हिस्ट्री ऑफ मैथेमेटिक्स” तथा ए० एन० श्वाइट हेड द्वारा लिखित “एन इंट्रोडक्शन टू मैथेमेटिक्स” नामक पुस्तकों में भारतीय गणित शास्त्र के बारे में उन्होंने अनेक त्रुटियाँ की हैं। श्वाइट हेड ने यहाँ तक लिख दिया है कि भारत में एक, दो, तीन आदि अंकों का प्रयोग सर्वप्रथम भास्कर नामक गणितज्ञ ने किया था, जबकि सच्चाई यह है कि भास्कराचार्य का जन्म ही शक सम्वत् १०३६ (वि० स० ११७१, सन् १११४ ई०) में हुआ था।^१ इसमें पूर्व तो अनेक वैदिक, जैन व बौद्ध गणितज्ञ हो चुके थे और उनका अनुसरण अनेक विद्वानों के माध्यम से अनेक पाश्चात्य विद्वानों ने किया था। जर्मन आलोचक श्लेगल “डेसीमल सीफर” को भारत की देन स्वीकार करते हुए लिखते हैं कि—

“The decimal cyphers, the honour of which, next to the most important of human discoveries, has with the common contact of historical authorities, been ascribed to the ‘Hindus’”.

प्रो० मेकडानल के अनुसार “न्यूमरीकल फीगर्स” के आविष्कारकर्ता भारतीय थे तथा “डेसीमल सिस्टिम” भारतीयों की देन है। भारत को गणित के क्षेत्र में पाश्चात्य जगत् का गुरु स्वीकार करते हुए वे लिखते हैं—

“In Sciences, too, the debt of Europe to India has been considerable. There is in the first place the great fact that the Indians invented the numerical figures used all over the world, the influence which the decimal system of reckoning dependent on those figures has had not only on mathematics

१ — भास्कराचार्य ने अपने जन्म के सम्बन्ध में ‘सिद्धान्त शिरोमणि’ में लिखा है—
‘रस गुण पूर्णं मही सम शक नृपये भवन ममोत्पति’ अर्थात् रस = ६ गुण = ३६, पूर्ण = १ और मही = १ शाके वर्ष में मेरा जन्म हुआ। अंकनाम वामनागति के अनुसार इनका जन्म शक सम्वत् १०३६ में हुआ।

२ — Schlegel's History of Literature, P. P. 143.

but on the progress of civilization, in general, can hardly be over-estimated. During the eighth and ninth centuries the Indian became the teachers in arithmetic and algebra of the Arabs, and through them of the nations of the west. Thus, though we call the latter Science by an Arabic name, it is a gift we owe to India.^१

हों। ये भी दाशमिक संकेत का आविष्कारकर्ता भारतीयों को ही स्वीकारा है—
 "This conclusively proves that the decimal notation was familiar to the Hindus when the Vyasa Bhasya was written, i. e. Centuries before the first appearance of the notation in the writing of the Arabs or the Greco syrians Intermediaries."^२

सर मोनियर विलियम्स के अनुसार अरब गणित के क्षेत्र में भारत के ऋणी हैं—
 "From them (Hindus) the Arabs received not only their first conceptions of Algebraic analysis, but also those numerical symbols and decimal notations now current every where in Europe, and which have rendered untold Service to the progress of arithmetical Science".^३

द्वय तथा एक से नौ तक की संख्या भारत से अरबों ने सीखी और अरबों ने यूरोप में उसका प्रचार किया। इस सम्बन्ध में डब्ल्यू. डब्ल्यू. हन्टर का कहना है—

"To them (the Hindues) we owe the invention of the numerical symbol on the decimal Scale. The Indian figures 1 to 9 being abbreviated forms of initial letters of the numerals themselves and the zero, or 0, representing the first letter of the Sanskrit word for empty (Sunya). The Arabs borrowed them from the Hindus, and transmitted them to Europe".^४

१- Macdonell's History of Sanskrit Literature, P. P. 434.

२- Dr. Ray - History of Hindu Chemistry, Vol II. PP. 117.

३- Sir M. Monier Williams. Ancient and Mediaeval India, Vol I, PP. 376.

४- W. W. Hunter - "India" (Imperial Gazetteer, PP 213.

भारत में गणित की तीन शाखाएँ—अंकगणित, रेखागणित और बीजगणित प्रचलित हुई। इन्हीं तीन शाखाओं के अन्तर्गत स्थिति शास्त्र, गतिशास्त्र, चलन-चरन, द्रवस्थिति शास्त्र आदि गणित की विभिन्न शाखाओं के सिद्धान्तों का निरूपण हुआ।

अंक गणित के बारे में मैनिंग महोदय^१ का कहना है कि अन्य प्राचीन राष्ट्रों की तुलना में हिन्दू लोग अंक गणित की समस्त शाखाओं में विशेष रूप से अग्रणी रहे हैं। हण्टर के अनुसार हिन्दुओं ने बिना किसी विदेशी प्रभाव के अंक गणित व बीजगणित में स्वतन्त्रता पूर्वक उच्च योग्यता प्राप्त कर ली थी^२। “सूर्य सिद्धान्त” का निर्माण बहुत पहले ही आर्यों ने कर दिया था, जबकि रेखा गणित के ज्ञान के अभाव में “सूर्य-सिद्धान्त” का निर्माण प्रो० केप्लर के अनुसार^३ सम्भव ही नहीं है। एल्फिंस्टन महोदय का तो यहाँ तक कर्त्ता है कि “सूर्य-सिद्धान्त में वर्णित त्रिकोणमिति की ओर पड़ति है, वह मात्र यूनानियों के प्राप्त ज्ञान से बढ़ कर ही नहीं है वरन् उसमें ऐसे सूक्ष्म हैं जिनका आविष्कार यूरोप में गत दो शताब्दियों में ही हुआ है।”^४ यही हा एक बीज गणित के क्षेत्र में है। एल्फिंस्टन के अनुसार आर्य भट्ट मात्र डायफेन्ट्स से थोड़ा ही नहीं था वरन् उसके अनुयायियों ने वर्तमान के बीज गणित क्षेत्रों को भी बहुत अधिक प्रभावित किया है।^५

इस प्रकार अंक गणित, बीज गणित और रेखा गणित के क्षेत्र में भारतीय उपलब्धियों का लम्बा इतिहास है। प्रस्तुत पुस्तक में वैदिक काल की गणितीय उपलब्धियों का संक्षिप्त परिचय प्रस्तुत किया गया है, क्योंकि उपलब्धियों के इस लम्बे इतिहास के बीज वही पर अंकुरित हुए हैं। यहाँ इस पुस्तक में लेखक का मुख्य उद्देश्य गणित के मूलतम सिद्धान्तों की व्यापक खोज कराना नहीं रहा है वरन् तत्कालीन उपलब्धियों का परिचय कराना रहा है, इस तरह मेरा यह निबन्ध ऐतिहासिक न होकर ऐतिहासिक है।

पुस्तक को पाँच अध्यायों में विभक्त किया गया है। प्रथम अध्याय में वैदिक साहित्य का संक्षिप्त परिचय है साथ ही यह बताने का प्रयास किया गया है कि आर्यों को गणित की आवश्यकता किस रूप में और क्यों थी? दूसरे अध्याय में

१ - Manning - Ancient and Mediaeval India, Vol I, PP. 374.

२ - W. W. Hunter - 'India' (Imperial Gazetteers), PP. 219.

३ - Prof. Wallace - Mill's India, Vol II PP. 150.

४ - Elphinstone History of India, PP. 129.

५ - Elphinstone History of India, PP. 131.

ग्रंथ गणित में सम्बन्धित सिद्धान्तों के विवरण हैं। तीसरे में रेखा गणित के सिद्धान्तों-साध्य एवं रचनाओं (Theorems & constructions) तथा चतुर्थ अध्याय में बीजगणित के मूलभूत सिद्धान्तों (Fundamental Principles) का वर्णन किया गया है। अन्तिम अध्याय में इस भ्रान्ति का निवारण किया गया है कि प्रायः लिखना नहीं जानते थे। प्रामाणिक मामलों के आधार पर यह बताया गया कि प्रायः ऋग्वेदिक-काल (पूर्व वैदिक-काल) में ही लेखन कला (Art and Writing) से परिचित थे।

वैदिक साहित्य में गणितीय विषयक ग्रन्थों की टटोलने की प्रेरणा मुझे स्वामी दयानन्द मन्त्रिणी कृत ऋग्वेदादि भाष्य भूमिका, पं० रघुनन्दन कृत "वैदिक सम्पत्ति" आदि ग्रन्थों का अध्ययन करने समय मिली। जब सम्पूर्ण वेद वांगमय का पारायण किया तो इसमें गणितीय सिद्धान्तों का अक्षय भण्डार मिला, किन्तु समस्त वांगमय की पाह लेना मेरे लिए सम्भव नहीं था। इसी कारण मैंने अपने सामान्य अध्ययन के आधार पर जो कुछ मेरी अपनी दृष्टि से प्रस्तुत किया है वह पाठकों के सामने प्रस्तुत है। इस पुस्तक की रचना में मैंने अब तक प्रकाशित अनेक विद्वानों के ग्रन्थों से सहायता ली है, मैं उन सबका कृतज्ञ हूँ।

इसके अतिरिक्त इस कार्य को सम्पन्न कराने में स्व० श्री दुर्गालाल श्री माधुर, भू० पू० अधीक्षक पुरातत्व एवं संग्रहालय उदयपुर, प० मुधाकर जी, बैंगलौर, डा० रामचन्द्र व्यास, गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जाधपुर, दयाम सुन्दर व्यास, पुस्तकालयाध्यक्ष, सरस्वती भवन पुस्तकालय, उदयपुर, डॉ० बृजमोहन जाबलिया, उदयपुर आदि का जो सहयोग रहा, उसके लिए मैं उन्हें धन्यवाद अर्पित करता हूँ। गणित के मूर्धन्य विद्वान डॉ० बी. एस. महाजनी के प्रति हार्दिक कृतज्ञता ज्ञापित करता हूँ, जिन्होंने पुस्तक का प्राक्कथन लिखा। अपने आदरणीय मित्र डॉ० भवानीलाल भारतीय ने कुछ शब्द लिखने की जो अनुकम्पा की, उसके लिए भी मैं उनका ऋणी हूँ। जिनके चरणों में बैठकर मैंने वेद एवं वैदिक साहित्य का अध्ययन किया उन परम कृपालु परम पूज्य पिताजी प० गोवर्धन जी व्यास को मात्र कृतज्ञता ज्ञापित कर मैं उन्मत्त नहीं हो सकता, यह तो उन्हीं की प्रेरणा का पत्र-पुष्प है। मैं अपने गुरुदेव डॉ० रामप्रसाद व्यास के प्रति भी कृतज्ञता ज्ञापित करता हूँ जो शोध क्षेत्र में निरन्तर मेरे प्रदर्शक बने रहे। अन्त में मैं अपने मित्र श्री उमराव सिंह जी मंगल के प्रति भी आभार प्रदर्शित करता हूँ जिनके प्रयत्नों से ही यह पुस्तक सुव्यवस्थित रूप से पाठकों तक पहुँच सकी है।

वेद निलयम्

मयंक विश्वाकाशस्पति

६२०, रसाला रोड,

जोधपुर।

संकेताक्षर तालिका

१. अष्टा०	अष्टाध्यायी (पाणिनी कृत)
२. अ० सं० । अथर्व० सं०	अथर्ववेद संहिता
३. आ० ज्यो०	आर्चं ज्योतिष
४. आ० शु० सू०	आश्वानयन शुक्ल सूत्र
५. ऋ० सं०	ऋग्वेद संहिता
६. का० शु० सू०	कात्यायन शुक्ल सूत्र
७. का० सं०	काठक संहिता
८. कृष्ण यजु०	कृष्ण यजुर्वेद
९. छा० उ०	छान्दोग्य उपनिषद्
१०. तैत्ति० ब्रा०	तैत्तरीय ब्राह्मण
११. तै० सं०	तैत्तरीय संहिता
१२. पा० ग० इ०	पाटी गणित का इतिहास
१३. मै० सं०	मैत्रायणी संहिता
१४. यजु० सं०	यजुर्वेद संहिता
१५. या० ज्यो०	याजुष ज्योतिष
१६. ला० श्री० सू०	लाटायन श्रौत सूत्र
१७. वे० ज्यो०	वेदाङ्ग ज्योतिष
१८. गृह्ण० उ०	गृह्यारम्भक उपनिषद्
१९. श० ब्रा० । शत० ब्रा०	शतपथ ब्राह्मण
२०. श्री० सू०	श्रौत सूत्र

विषय-प्रवेश

वेद शब्द की व्युत्पत्ति 'विद्' धातु से हुई है, जिसका अर्थ होता है 'ज्ञान' (विद् ज्ञानेन्) । अतः शब्द व्युत्पत्ति के आधार पर 'वेद' का अर्थ होना 'ज्ञान संग्रह' । लैटिन भाषा की एक धातु है, 'विडर' (Vider), जिससे आंग्ल भाषा का शब्द "विजन" (Vision) बना है । "विजन" का अर्थ है, "दर्शन" । आंग्ल भाषा-भाषी इसी शब्द को वेदों हेतु प्रयुक्त करते हैं । इन दोनों शब्दों के आधार पर यदि हम वेदों की परिभाषा करें, तो कहेंगे कि "वेद साक्षात्कार किए हुए ज्ञान का संग्रह है ।" परिभाषा के दो शब्द ज्ञान व साक्षात्कार विशेष महत्व के हैं । पहला शब्द है 'ज्ञान' । प्रश्न यह उत्पन्न होता है कि ज्ञान क्या है ? कैसे व कहा से प्राप्त होता है ? क्या मानव ही ज्ञान का सृजक है ? इन प्रश्नों का सामान्य उत्तर यही है कि ज्ञान मानवीय सृष्टि की भौतिक व आध्यात्मिक जानकारी को कहते हैं । इसका निर्माता मानव नहीं व न ही पुस्तकें ज्ञान की प्राप्ति का मूल स्थान हैं । हाँ, मानव पुस्तक लिखता है, उसे पढ़कर हम ज्ञान प्राप्त करते हैं, लेकिन स्वयं पुस्तक के लेखक ने भी अपने पूर्ववर्ती आचार्यों से ज्ञान प्राप्त किया है । इस प्रकार यदि हम इस ज्ञान की परम्परा का मूल ढूँढने का प्रयास करें तो हमें उत्तरोत्तर अपने पूर्व ज्ञान की ओर बढ़ना होगा । अन्ततोगत्वा हम मानवी सृष्टि के आदि तक पहुँच जाते हैं अर्थात्, आदि मानव तक पहुँच जाते हैं । लेकिन क्या वह आदि मानव ही ज्ञान का सृष्टा था । नहीं । यदि वह सृष्टा होता तो निश्चित रूप से परवर्ती मानव भी ज्ञान का सृष्टा होता । तब प्रश्न यह उठता है कि जब आदि मानव भी ज्ञान का सृष्टा नहीं था, तो उसे ज्ञान कहाँ से प्राप्त हुआ ? इस सँका का समाधान परिभाषा के दूसरे शब्द 'साक्षात्कार' से होगा । आदि मानव ने ज्ञान के साक्षात् दर्शन किए थे । सृष्टि का निर्माता परमपिता परमेश्वर है । उसी ने मानव जाति को भी उत्पन्न किया । मानव को चिन्तन व मनन

की शक्ति प्रदान की। अतः आदि मानव समुदाय ने चिन्तन किया व प्रभु से प्रार्थना की कि वह उन्हें ज्ञान दे। प्रभु ने उन्हें ध्यानावस्था में ज्ञान के दर्शन करवा दिये। ज्ञान से साक्षात्कार करने वाले आदि ऋषि चार थे— अग्नि, वायु, आदित्य व अगिरा।

इन चारों ऋषियों ने उस प्रभुदत्त ज्ञान को मानवी भाषा में व्यक्त किया। इन चारों ऋषियों द्वारा अभिव्यक्त ज्ञान को अन्य ऋषियों ने भी ग्रहण करना चाहा। अतः उन्होंने भी ध्यान मग्न हो ज्ञान का साक्षात्कार किया। उन्होंने पूर्ववर्ती ऋषि-चतुष्टय के ज्ञान की व्याख्या अलग-अलग मन्त्रों के माध्यम से प्रस्तुत की। ये ऋषि मन्त्रों के दृष्टा कहलाए, क्योंकि इन्होंने ज्ञान के दर्शन किए। दर्शन करने के कारण ही उन्हें ऋषि कहा जाता है। “ऋषिदर्शनात् स्तोमान् ददर्श”^१ अर्थात् ज्ञान का साक्षात् दर्शन करने वाला ही ऋषि है।

ध्यानावस्था में ईंठे हुए ऋषि को ज्ञान का दर्शन कराने वाला वह परमात्मा ही है। अतः उसी से प्राप्त ज्ञान को ऋषियों ने मन्त्रबद्ध किया व यह मन्त्रों का संग्रह ‘वेद’ कहलाया। वेदों में संग्रहीत ज्ञान प्रभुदत्त है, अतः वेदों को ईश्वर कृत (अपौरुषेय) माना जाता है। स्वयं वेदों में भी वेदों को ईश्वर कृत कहा गया है।^२ ऋषियों द्वारा प्रस्तुत समस्त मन्त्रों की सुविधा के अनुसार चार भागों में विभाजित कर दिया गया, इसमें वेद चार हो गए— ऋग्वेद, सामवेद, यजुर्वेद व अथर्ववेद। ये चारों वेद सहिताएँ ही ज्ञान का मूल स्रोत हैं। ज्ञान का चूँकि कोई अन्त नहीं, अतः वेदों के लिए भी कहा गया है—“अनन्ता र्क वेदा” (तै० ब्रा० ३-१०-१३-३)। आरम्भ में इस ज्ञान भण्डार को तीन भागों में बांटा गया था। वह वेद त्रयी कहलाता था, लेकिन कालान्तर में इसे चार भागों में कर दिया गया। इन चारों वेदों का संक्षिप्त परिचय देना समीचीन होगा।

ऋग्वेद सहिता— सहिता साहित्य में ऋग्वेद प्राचीनतम संहिता है। कुछ विद्वानों का यह भी मत रहा है कि ऋग्वेद के दस मण्डलों में से आरम्भिक ६ मण्डल

१ - निरुक्तम् २.११, दुर्गाचार्य कृत वृत्ति में इसकी निम्न व्याख्या है—

ऋषिदर्शनात् । पश्यति ह्यगमो सूक्ष्मानप्यर्थान् । स्तोमान्दर्शत्वापमन्वयः ।

२ - तस्माद्यज्ञात्सर्वं हुत ऋचः सामानि जज्ञिरे ।

छन्दांसि जज्ञिरे तस्माद्यजुस्तस्मादजायत ॥ — यजुर्वेद ३१।७ ।

अर्थात्— इस सर्व प्रणेतृ यज्ञनीय परमेश्वर से ऋचायें (ऋग्वेद), साम (सामवेद), प्रकट हुमा, उमीने छन्द (अथर्ववेद) उत्पन्न हुमा तथा ऋषी परमेश्वर से यजुः (यजुर्वेद) उत्पन्न हुमा ।

प्राचीन हैं व दशम मण्डल इसमें बाद में जोड़ा गया है। ऋग्वेद में विभिन्न देवताओं की स्तुतियों का संकलन है। ये स्तुतियाँ अत्यन्त रोचक व भावमय हैं। समस्त स्तुति का पद्यबद्ध हैं। काव्य शास्त्रीय दृष्टिकोण से भी यह एक उच्चकोटि का काव्य ठहरता है। इन स्तुतियों में से उपा की स्तुति का सूक्त तो अत्यन्त मनमोहक व रमणीय है। उपा के चित्रण में ऋषि की कल्पना ने जो उद्गान ली है, वह मर्यादित हृदय-ग्राही है। ऋग्वेद में गंगा, यमुना, सिन्धु, सुवास्तु, गोमती (गोमल), प्रादि उत्तरी-पश्चिमी भाग की नदियों का भी नामोल्लेख हुआ है। जिनके आधार पर तत्कालीन धर्म सम्प्रदाय का विस्तार दोन ज्ञात किया जा सकता है।

यजुर्वेद—जैसे ऋग्वेद उपासना प्रधान संहिता है, वैसे यजुर्वेद कर्मकाण्ड प्रधान संहिता है। इसमें विभिन्न यज्ञों से सम्बन्धित मन्त्रों व यज्ञों का विधान प्रस्तुत किया गया है। यजुर्वेद के दो प्रकार हैं— प्रथम शुक्ल यजुर्वेद व द्वितीय कृष्ण यजुर्वेद। शुक्ल यजुर्वेद को वाजसनेयी संहिता भी कहा जाता है। शुक्ल यजुर्वेद की दो शाखाएँ उपलब्ध हैं— काण्व शाखा व माध्यन्दिनीय शाखा। इसी प्रकार कृष्ण यजुर्वेद की चार शाखाएँ हैं— काठक संहिता, कपिष्ठल संहिता, मैत्रेयी संहिता व तैत्तिरीय संहिता। शुक्ल यजुर्वेद गद्य-रचनायुक्त रचना है, जबकि कृष्ण यजुर्वेद पद्यमय रचना है। शुक्ल यजुर्वेद चालीस अध्यायों में विभक्त है। इसका चालीसवाँ अध्याय ईशोपनिषद् है। इस अध्याय का भारम्भ “ईशावास्यम् इदम्” से होता है। इसी कारण इसे ईशावास्योपनिषद् अथवा ईशोपनिषद् कहा गया है। इस अध्याय का कर्मकाण्ड में कोई सीधा सम्बन्ध नहीं, प्रस्तुत यह अध्याय अध्याय विषय से सम्बन्धित है।

सामवेद — साम का अर्थ है प्रीति, प्रीतिकार व गान^१। इस वेद में प्रभु के गुणों का प्रीति पूर्वक गान का विधान प्रस्तुत किया गया है। इसीसे इसे सामवेद संज्ञा प्रदान की गई है। यज्ञों में भी सत्वर मन्त्रोच्चारण का आदेश है—“ना साम यतोर्भवेति”^२ अर्थात् बिना साम के यज्ञ नहीं होता। इस दृष्टिकोण से सामवेद का मन्त्राविशिष्ट महत्त्व है। सामवेद दो भागों में विभक्त है—पूर्वप्राचिक व उत्तरप्राचिक। इसमें कतिपय मन्त्रों की पुनरावृत्ति भी हुई है, यदि उन्हें निकाल दिया जाय तो इसकी मंत्र संख्या १५४६ रह जाती है। इनमें से भी ७५ मन्त्रों के अलावा शेष १४७१ मंत्र ऋग्वेद से लिए गए हैं। वर्तमान में सामवेद की तीन शाखाएँ उपलब्ध हैं। पौराणिक साहित्य में सामवेद की सहस्र शाखाओं का उल्लेख है। वर्तमान में प्रायः तीन शाखाएँ— कौषुम शाखा, राणावनीय शाखा व जैमिनीय शाखा हैं।

१ — यदिक साहित्य — पं० राम गोविन्द त्रिवेदी, पृष्ठ १०२-११०।
२ — शतपथ ब्राह्मण।

अथर्ववेद — अथर्ववेद के नामकरण पर प्रकाश डालते हुए पं० रामगोविन्द त्रिवेदी ने लिखा है कि “अथर्वा”^१ ऋषि द्वारा परिदृष्ट व अविष्कृत होने के कारण इस वेद का नाम अथर्ववेद पड़ा ।^२ यह विज्ञान काण्ड प्रधान रचना है । इसमें आयुर्वेद से सम्बन्धित अनेको व्याधियों व उनके उपचार की विधि बतलाई गई है । साथ ही उसमें राजनीति शास्त्र व समाजशास्त्र आदि से सम्बन्धित अनेक नियमों का भी उल्लेख हुआ है । वाश्चार्य विद्वान् भ्रान्तिवश इसे जादू, टोनों व भ्रम्यविश्वासों से परिपूर्ण मानते हैं । गहन अध्ययन से ज्ञात होता है कि यह विज्ञान काण्ड प्रधान रचना है । इसमें भी अनेक मंत्र ऋग्वेद से लिए गए हैं ।

इन वेद संहिताओं का बाह्य रूप देखने से प्रतीत होता है कि वेद मात्र ईश्वर व अध्यात्म विषयक ग्रन्थ हैं । क्योंकि एक वेद प्रार्थनाएं^३ सिलाता है तो दूसरा ईशोपासना का गान विधान प्रस्तुत करता है, अग्न्य कर्म काण्ड व विज्ञान काण्ड से सम्बन्धित हैं । लेकिन इसी आधार पर संहिता साहित्य को आर्यों की धर्म पुस्तक कह देना हमारी भूल होगी । वैदिक साहित्य में प्रसंगवश समस्त मानवीय ज्ञान के सूत्र प्रस्तुत किए गए हैं, यजुर्वेद में कहा है —

‘समाधत्तात् सर्वं हृत, अचः सामानि जज्ञिरे ।

छन्दांसि जज्ञिरे तस्माद्यजुस्तस्माद्यजायत ॥’^३

इस मन्त्र का भाष्य इस प्रकार किया गया है— “ जिसका कभी नाश नहीं होता, जो सदा ज्ञान स्वरूप है, जो सदा सुख स्वरूप व सुख देने वाला है, इन गुणों (सत्, चित्, आनन्द) से युक्त जो सर्वव्यापी है उसी ईश्वर ने ऋग्वेद, सामवेद, यजुर्वेद व अथर्ववेद की रचना की । उक्त मंत्र में ‘जज्ञिरे’ व ‘यजायत’ बहुवचन में है, अतः वेदों को भी अनेक विद्याओं से युक्त मानना स्पष्ट होता है ।

इन वेद संहिताओं में रोषित ज्ञानाङ्कुरों की परवर्ती वैदिक साहित्य में पूर्ण व्याख्या हुई है । वेद के प्रत्येक विषय की व्याख्या के लिए पृथक-पृथक ग्रन्थों का निर्माण हुआ : दार्शनिक तत्त्वों की व्याख्या के लिए उपनिषदों का निर्माण किया गया, तो यज्ञों का विधान प्रस्तुत करते हुए ब्राह्मण ग्रन्थों की रचना हुई । सामाजिक नियमों का विधान गृह्य सूत्रों, धर्म सूत्रों व स्मृतियों में किया गया । इसी प्रकार चार उप

१ — यही अथर्वा के स्थान पर अंगिरा होना चाहिए ।

२ — वैदिक साहित्य — रामगोविन्द त्रिवेदी, पृष्ठ ११० ।

३ — यजु० सं० ३१।७ ।

वेद— आयुर्वेद, धनुर्वेद, अथर्ववेद व गांधर्ववेद बने। शिक्षा, कल्प, ज्योतिष, निरुक्त, व्याकरण व छन्द नामक छः वेदों का निर्माण किया गया व चार उपांग— पुराण, न्याय, भीमांसा व धर्म बने। इस समस्त साहित्य को “वैदिक साहित्य” नाम से ही अभिहित किया जाना चाहिये, क्योंकि इसकी रचना का मूल उद्देश्य वैदिक ज्ञानाकुरों को पल्लवित करना ही रहा। कुछ सूत्रकारों ने तो ब्राह्मणों व उपनिषदों को वेद ही कह डाला है।^१

लेकिन वह उचित नहीं। इस समस्त साहित्य के लिए तो “वैदिक साहित्य” संज्ञा ही उचित प्रतीत होती है।

इस समस्त वैदिक साहित्य के अवसोक्तोपरान्त इस निष्कर्ष पर सहज ही पहुँचा जा सकता है कि जिन विषयों का अध्ययन वर्तमान में हो रहा है, वे समस्त वैदिक काल में आबिष्कृत हो चुके थे। इसके अतिरिक्त कुछ विषय तो ऐसे हैं, जिनका अध्ययन आज नहीं हो रहा है। वैदिक कालीन अध्ययन के विषयों की एक सूची हमें छन्दोग्य उपनिषद में भी प्राप्त होती है। छन्दोग्य उपनिषद की एक आख्यायिका में सनत्कुमार नारद से पूछते हैं कि हे नारद ! तुम क्या पढ़े हो ? इस पर नारद प्रत्युत्तर देते हुए कहता है—

ऋग्वेदं ऋगबोध्येनियजुर्वेदं सामवेदमाथर्वणं
चतुर्यमितिहास पुराणं पञ्चम वेदानां वेवं विश्वम्
राशि दैवं निधि वाकोवाचमेकायनं देवविद्यां ब्रह्मविद्यां
भूत विद्यां क्षत्र विद्यां नक्षत्र विद्यां
सर्पदेवजनविद्यामेतद्भगवोऽप्येभि ॥२

हे भगवन् ! मैं ऋग्वेद, यजुर्वेद, सामवेद चौथा अथर्ववेद पाँचवा इतिहास व पुराण, वेदों का वेद अर्थात् व्याकरण, पितृ विद्या, राशि विद्या (गणित), देव विद्या, निधि विद्या (Mining Engineering), तर्क शास्त्र, ब्रह्म विद्या, भूत विद्या, क्षत्र विद्या, नक्षत्र विद्या (Astrology), सर्प विद्या, देवजन विद्या इतनी विद्याएं पढ़ा हूँ।

इससे स्पष्ट हो जाता है कि कितनी उच्चकोटि की शिक्षा की व्यवस्था वैदिक काल में थी। कितनी विद्याओं का अध्ययन प्रार्थ करते थे। उक्त आख्यायिका में जिन विषयों का उल्लेख किया गया है, उनमें गणित भी है। इससे स्पष्ट है कि वैदिक काल

१ - भाद्रवालयन धीत सूत्र, २४।१।३१। व जमिनीय भीमांसा २।१।३२।
२ - छा० उ०, ७।१।२।

मे गणित विद्या का पर्याप्त प्रचार था । अन्य विषयों की भांति गणित विद्या के सम्बन्ध मे भी वेदों में संकेत मिलते हैं । इनका विशद विवेचन परवर्ती वैदिक साहित्य में भी हुआ है ।

गणित विद्या का सम्बन्ध गणना से है । गणना की प्रधानता के कारण इस विद्या को गणित विद्या के नाम से अभिहित किया जाता है ।

गणित विद्या का हमारे भौतिक जीवन के साथ अभिन्न सम्बन्ध है । सामान्य से सामान्य व्यवहार में हमें गणना की आवश्यकता प्रतीत होती है । यथा— अमुक व्यक्ति के पाँच मकान, आठ पुत्र व पन्द्रह गायें हैं । इसमें पाँच, आठ व पन्द्रह गणना-वाची शब्द हैं । यह तो अत्यन्त सामान्य व्यवहार की बात हुई । यदि हम जीवन के अन्य पहलुओं को देखें तो ज्ञात होगा कि जीवन के प्रायः प्रत्येक पहलू मे गणित का प्रयोग होता है । भायों के जीवन का अध्ययन करने से स्पष्ट हो जाता है कि उनके जो व्यवहार थे, उनमे गणित का उपयोग होता था ।

सर्व प्रथम निर्माण कार्य को ही लीजिये । आर्य रहने के लिए भवनों का निर्माण करते थे । भवन निर्माण में एक गणित व रेखा गणित दोनों की समान रूप से आवश्यकता पड़ती थी । उस समय सामान्य कोटि के भवन ही नहीं बनते थे वरन् १००-१०० द्वाजाओ व भुजाओं के गृहों का निर्माण होता था । उसका उल्लेख हमें ऋग्वेद में मिलता है, यथा —

यथा वः स्वाहाग्नये वा शेम परीतामिष्टं तवद्भिश्च हृष्यैः ।
तेभिर्नो अग्ने अभिर्तर्महोमिः शतं भूमिरायसीभिनि पाहि ॥^१

अथा मही न आयस्यमा धृष्टो नृपीतये । भूमंवा शतभुजि ।^२

धवत्यानि नो सस्या बभूवुः सवावहे यद्वृकं पुराचित् ।
यूह्यंतं मानं वरुण स्वधावः सहस्रं द्वारं जगमा गृहंते ॥^३

उक्त मन्त्रों में प्रथमीष्ट पद 'शतं भूमिरायसी भिति पाहि' 'भूमंवा शतं भुजि' 'सहस्रं द्वारं जगमा गृहंते' से भायों के विस्तृत गृहों का अभास होता है । इन

१ - ऋग्वेद सं०, ७।३।७ ।

२ - यही, ७।१५।१४ ।

३ - ऋग्वेद सं०, ७।८।५ ।

भवनों के बनाने में समिति (Symmetry) का भी ध्यान रखा जाता था, जिसमें रेखागणितीय ज्ञान की विशेष आवश्यकता रहती है। इन भवनों में १००-१०० द्वार व भुजाएं होती थी। इसके लिए उन्हें पूर्व ही एक योजना बनानी पड़ती होगी। उन द्वारों का भी प्रलग-प्रलग नाप होता था। उसी के अनुसार स्थान छोड़ना पड़ता था। उन द्वारों के लिए कपाट भी बनाए जाते होंगे। उनके भी नाप आदि में उन्हें गणित की आवश्यकता रहती थी।

निर्माण कार्यों में रथ का उल्लेख भी ऋग्वेद में हुआ है —

उपो वेभ्यमर्त्या विमाहि चन्द्ररया सूनृता ईरयंती ।

भावा वहन्तु सुयमासो अश्वा हिरण्यवर्णा पृथुपाजसोये ॥^१

इन रथों के निर्माण में उन्हें वृत्त आदि की गणित की आवश्यकता रहती थी। वृत्त का क्षेत्रफल, परिमिति, व्यास आदि का उपयोग किए बिना रथों के पहियों का निर्माण नहीं हो सकता था। इसी प्रकार अन्य कई निर्माण कार्यों का उल्लेख भी वेदों में हुआ है। जिसमें कि गणित की आवश्यकता रहती है।

घायों के प्राथिक जीवन में भी गणित का उपयोग होता था। वे मुख्य रूप से कृषि कर्म करते थे, उसमें खेतों को नापने, जोतने आदि में वे गणित का उपयोग करते थे। उनका व्यापार भी काफी बड़ा-बड़ा था। व्यापार में वे निष्क नामक मुद्रा का उपयोग करते थे। इसका उल्लेख ऋग्वेद में निम्न प्रकार से हुआ है —

१ — शतं राज्ञो नाधमानस्य निष्काञ्छतमश्वान्प्रयतान्सद्य आबधु ।

शतं कक्षीषां असुरस्य गोना विवि अवोऽजरमा ततान ॥^२

२ — अर्हन्निर्वाणं सप्तर्वाणि चन्द्रार्हन्निष्कं दत्तं चित्रवर्णं ।

अर्हन्निदं दयसे विश्वमम्भं न वा ओजियोरुद्र त्वदस्ति ॥^३

३ — आ श्वेत्नेयस्य जंतवोद्युमद्वर्धन्त कृष्टयः ।

निष्कप्रीवोवृहदुक्थ एना भध्वा न वाजपुः ॥^४

१ — ऋग्वेद सं०, ३।६।१२ ।

२ — वही, १।१२६।२ ।

३ — वही, २।३३।१० ।

४ — वही, ५।१६।३ ।

४ - निष्कं वा पा कृण्वते स्रजं वा कुहितदिवः ।

अत्रे द्रुःष्वप्यं सर्वमाप्तये परिदधस्यनेहसो य ऊनयः सुऊतपो व
ऊतयः ॥^१

कुछ विद्वान् निष्क को गहना विनोप मानते हैं, लेकिन निष्क वास्तव में गहना नहीं वरन् मुद्रा ही थी । इस निष्क नाम की मुद्रा का प्रचलन पाणिनी के काल तक था । पाणिनी की अष्टाध्यायी में मुद्रा के रूप में इसका उल्लेख मिलता है, यथा—
अममामेनिष्कादिभ्यः ।^२ इसके साथ ही पाणिनी ने यह भी कहा है कि जब किसी वस्तु का निष्क के हिसाब में मूल्य बताया हो तो नैपिक, द्विनैपिक, त्रिनैपिक आदि कहा जाय (“द्वि त्रिवृत्तानिष्कात्”)^३ जिस आदमी के पास १०० निष्क होते हैं उसे नष्कवर्तिक व जिसके पास हजार निष्क होते उसे नैष्कनाम्निक कहते थे । (शतसहस्रान्ताञ्चनिष्कान्)^४ इससे स्पष्ट हो जाता है कि वेदों में उल्लिखित निष्क एक मुद्रा ही थी । इसके अलावा वैदिक काल में शतमान नामक मुद्रा का भी प्रचलन था, जिसका उल्लेख शतपथ ब्राह्मण में हुआ है यथा—

सस्ये श्रीणि शतमानानि हिरण्यानि दधिष्ठा । तानि ब्राह्मणे ददाति न वै ब्रह्मा
प्रधरति न स्तुते न वा सत्यपथ, स यशो न वै हिरण्येन किंचन कुर्वन्त्यथ शतशस्वस्मा
श्रीणि शतमानानि ब्रह्मणे ददाति ॥^५

इसी प्रकार सुवर्ण नामक एक अन्य मुद्रा का उल्लेख शतपथ ब्राह्मण में^६ मिलता है । इन मुद्राओं का प्रचलन उनकी व्यापारिक समृद्धि को सूचित करता है । व्यापार में गणित का उपयोग होता ही है । इसके अतिरिक्त ये लोग नीकर भी रखते थे व वेतन भी देते थे ।^७ इन सेवाओं को वेतन मासिक भयवा दैनिक देते होंगे । जिसमें उन्हें हिसाब करना होता था ।

आर्य अपनी धातु की भी गणना करते थे । यजुर्वेद में कहा गया है— जीवेम
शरयः शतम् ।^८ इससे स्पष्ट है कि वे अपनी धातु का भी हिसाब रखते थे, जिससे कि उन्हें गणित की आवश्यकता थी ।

१ - ऋग्वेद सं०, ८।४७।१५ ।

२ - अष्टा० ५।१।२६, २०, ३०, ३४; ५।४।१; ५।२।१२० ।

३ - अष्टा० ५।१।२० ।

४ - अष्टा० ५।१।११६ ।

५ - शत० ब्रा० ५।५।५।१६ ।

६ - शत० ब्रा० १२।२।३।२ ।

७ - ऋग्वेद ६।१०।३।१ ।

८ - यजु० सं० ३६।२४ ।

धर्मों के इन सामान्य व्यवहारों में हमने देखा कि गणित का अत्यन्त उपयोग रहता था । लेकिन इनके अतिरिक्त उनके जीवन के भी ऐसे पहलू थे, जिनमें अत्यन्त उच्च गणित की आवश्यकता पड़ती है । पहला था ज्योतिष व दूसरा वेदो निर्माण । ज्योतिष के क्षेत्र में धर्म काफ़ी बढ़े-चढ़े थे । ज्योतिष शास्त्र के समस्त मूलभूत सिद्धान्तों का उन्हें ज्ञान था । वेदों में स्थान स्थान पर ज्योतिष के सिद्धान्तों का उल्लेख हुआ है । बारह मास, मात बार, सताईस नक्षत्र, सूर्य ग्रहण, सूर्य के प्रकाश के विभिन्न रंग, ग्रह आदि का उल्लेख वेदों में हुआ है ।^१ इन समस्त ज्योतिष सम्बन्धी क्रियाओं में गणित का उपयोग करना पड़ता है । विशेष रूप से 'ज्योतिष में रेखा गणित का काम पड़ता है, जितने ग्रह, उपग्रह हैं, उनकी सूर्य आदि से दूरी और मिलाप बताया जाता है ।'^२ उनके गति पथ के निर्माण में व वेग की गणना में गणित का उपयोग होता है । इस सम्बन्ध में उनकी गति व स्थिति ज्ञात करने में गति शास्त्र (Dynamics), स्थिति शास्त्र (Statics), त्रिकोणमिति (Trigonometry), आदि गणित की शाखाओं का उपयोग करना होता है ।

यज्ञादि कर्मों के लिए जिन हवन कुण्डों (Altar) का निर्माण वे करते थे, उनमें भी उन्हें गणित के विभिन्न पहलुओं की सहायता लेनी होती थी । ये हवन कुण्ड कोई सामान्य कोटि के व एक ही प्रकार के नहीं होते थे, बल्कि वे उच्च गणितीय सिद्धान्तों पर आधारित थे । विभिन्न प्रकार की वेदियों का निर्माण उस काल में किया जाता था । कतुरस्येन, वक्रपक्ष, व्यस्तपुच्छ, कंकचित, भ्रजलचित, प्रोगाचित, प्रमाचित आदि कई आकारों-प्रकारों की वेदियों का उल्लेख वैदिक साहित्य में हुआ है ।^३ ये समस्त "यज्ञ कुण्ड" रेखा गणित पर आधारित होते थे व एक न एक रेखा गणित के साध्य होते थे ।^४ इनकी लम्बाई, चौड़ाई, गहराई, गोलाई आदि में विभिन्न मापों की व्यवस्था थी । जिसका वर्णन आगे के अध्यायों में किया जायगा ।

इससे स्पष्ट हो जाता है कि धर्मों का जीवन अत्यन्त समृद्ध और सम्पन्न था व उसमें उन्हें प्रायः हर कार्य में गणित की आवश्यकता रहती थी । वैसे तो गणितीय सूत्र हमें सर्वत्र वैदिक साहित्य में बिखरे हुए मिलते हैं, पर इस गणित विद्या के

१ - ज्योतिष सम्बन्धी विस्तृत विवरण हेतु देखिए "प्रिय रत्न धर्म रचित"

वैदिक ज्योतिष ।

२ - रघुनन्दन शर्मा कृत वैदिक सम्पत्ति ।

३ - इन प्रकारों के सम्बन्ध में कृष्ण यजुर्वेद दृष्टव्य है ।

४ - रघुनन्दन शर्मा कृत वैदिक सम्पत्ति ।

निमित्त छः मंत्रों में से एक पूरा मंत्र रखा गया था । जो कि ज्योतिष कहलाता है । ज्योतिष के मुख्य रूप से दो भाग होते हैं — गणित व फलित । वेदांग ज्योतिष गणित पर आधारित है । उस समय गणित का उपयोग तो किया ही जाता था, पर साथ ही उसे विशेष महत्त्व दिया जाता था । गणित का महत्त्व बताते हुए कहा गया है —

यथा जित्वा मयूराणां नागानां मरणयो यथा ।

तद्वद्वेदांगशास्त्राणां गणितं मूर्धनि स्थितम् ॥^१

अर्थात् — जैसे मयूर के मस्तक पर जित्वा (घोभाममान होती) है व सर्वमणि (मर्यादित महत्त्वपूर्ण) है वैसे ही वेदांग शास्त्रों (जित्वा, कल्प, निष्कृत, व्याकरण, छन्द व ज्योतिष) में गणित श्रेष्ठतर व महत्त्वपूर्ण है ।

अंक गणित

वैदिक साहित्य में दो प्रकार की ज्ञान धारामों का उल्लेख हुआ है — प्रथम-विद्या दूसरी अविद्या । मानवीय ज्ञान की अध्यात्म विषयक (Spiritual) धारा की गणना विद्या के अन्तर्गत की जाती थी व अन्य भौतिक विषयों की (Material Sciences) गणना अविद्या में की जाती थी । इन दोनों ही ज्ञान धारामों में पारंगत व्यक्ति ही मोक्ष का अधिकारी माना जाता था ।^१ विद्या व अविद्या को क्रमशः परा विद्या व अपरा विद्या भी कहा जाता था । अपरा विद्या (लौकिक ज्ञान) को परा विद्या का सहायक अंग माना जाता था ।^२ इसकी पुष्टि छान्दोग्य उपनिषद्^३ की आख्या-की इच्छा से गया तो सनत्कुमार ने पूछा कि त्वम लौकिक विद्याएं (अविद्या या अपरा विद्या) पढ़ चुके हो अथवा नहीं । इस पर नारद ने अपनी पठित लौकिक विद्याओं को गिनाया जिसका उल्लेख पिछले अध्याय में हो चुका है । इस आख्यायिका में गणित की गणना अपरा विद्याओं (Material Sciences) में हुई है । इससे स्पष्ट हो जाता है कि गणित का अध्ययन अध्यापन उस समय आवश्यक रूप से होता था । गणित विद्या के तीन विभाग हैं— अंक गणित (Arithmetic), रेखा गणित (Geometry) व बीज गणित (Algebra) । इन तीन प्रमुख शाखाओं के आधार पर ही गणित की अन्य शाखाएं स्थिति शास्त्र (Statics), गति शास्त्र (Dynamics),

१ - विद्यां चाविद्यां च यस्तद्वेदोभयं सह ।
अविद्याया मृत्युं तीर्त्वा विद्याया मृतमश्नुते ॥ — यजु० सं० ४०।१४ ।

२ - मुण्डकोपनिषद् १।१।३।४ ।

३ - छा० उ० ७।१, १।२ ।

द्रव स्थिति शास्त्र (Hydro Statics), त्रिकोण मिति (Trignometry), खगोलीय, त्रिकोण मिति (Spherical Trigonometry), चलन कलन (Calculus) आदि पल्लवित हुई है । गणित के मूलभूत सिद्धान्त उक्त तीन शाखाओं में ही निहित है । प्रस्तुत अध्याय में वैदिक काल में विकसित अंक गणित पर प्रकाश डाला जायगा ।

अंक गणित का शाब्दिक अर्थ है अंक गणना विज्ञान । अंक शब्द की व्युत्पत्ति 'अकि चिह्ने' धातु से हुई है । इससे स्पष्ट हो जाता है कि अंक का अर्थ चिह्न बनाना है । आरम्भ में अंकों के लिए विभिन्न प्रकार के चिह्न बनाये जाते थे । पुनः उन चिह्नों को गिन लिया जाता था, इसी कारण इस गणितीय शाखा को अंक गणित का नाम दिया गया । चिह्नों के रूप में रेखा भी बनाई जाती थी । रेखा से ही लेखा शब्द बना, क्योंकि संस्कृत व्याकरण के अनुसार 'र से ल' बन जाता है ।^१ अतः इन चिह्नों की गणना को लेखा (हिसाब) भी कहा गया । यह लेखी की पद्धति प्राचीन काल में ही नहीं बल्कि वर्तमान में भी विद्यमान है । वर्तमान में देवनागरी आदि अंकों से अनभिज्ञ व्यक्ति [प्रायः दूध बेचने वाले, पानी भरने वाले आदि] मात्र रेखाएँ ही बनाते हैं व उन रेखाओं को एक निश्चित तिथि पर गिन लेते हैं । इस क्रिया में मूल कार्य गणना ही है । इन गणना सूचक शब्दों का जो प्रयोग प्रायः देखा जाता है इनका निर्माण भी भाषा के साथ ही हो गया था । इस सम्बन्ध में ५० सुधाकर द्विवेदी की मान्यता है कि: "इस संसार में व्यवहार के लिए जिस शब्द से बने, उसके पहले जो ध्यान देकर विचार करो तो एक, दो, तीन" के समझने के लिए पहिले इन्हीं शब्दों के अंक बने होंगे । बच्चे के गर्भ में माते ही एक दो," महीनों की गिनती होने लगती है ।^२

वास्तव में अत्यन्त सामान्य से सामान्य व्यवहार में गणनावाची शब्दों की आवश्यकता पड़ती है । यथा:— अमुक कार्य में हमें एक व्यक्ति की आवश्यकता होती है, और अमुक कार्य में दो, कहीं तीन और कहीं इसी प्रकार एक । अधिक की । व्यक्तिगत सेवा सहायता के लिए, एक सेवक, आक्रमणकारी कार्य के लिए अथवा सरसणात्मक कार्य के लिए, एक सेना की, जिसमें सहस्रों व्यक्ति आवश्यक होते हैं । जब हम अल्प सहायक वस्तुएँ और व्यक्तियों में, उसी राशि की कुछ और वस्तुएँ मिलाते हैं, तब वह बढ़ती है, जब उसमें से कुछ क्षय हो जाता है, तब वह घटती है, उसका उतना भाग कम हो जाता है । इस प्रकार अंकगणित, संख्याओं का वह विज्ञान है, जिसे योग, शेष, गुण, एवं भाग के चार प्रस्थानों में देखा जाता है ।^३ वास्तव में इस प्रकार

१ — रत्नयोडंतयोश्चैव शतयोर्वचयोस्तथा ।

घटन्तेपाञ्च सावर्ण्यमलंकारविदो जनाः ॥

२ — पाटी गणित का इतिहास, पृष्ठानंक १ ।

३ — अलखुराय शास्त्री कृत 'ऋग्वेद रहस्य' पृ० १५२-५३ ।

की घटुर प्रस्थानीय भ्रंक गणना की विशेषता के कारण ही इस विषय को भ्रंक गणित कहते हैं। इसकी आवश्यकता मानव को आरम्भ से ही प्रतीत हो गई थी। प्रतः भाषा का निर्माण होने के साथ ही भ्रंकों के हिसाब से सम्बंधित शब्द भी बन गये थे। भ्रंक गणित में मूल भ्रंक १ से ९ तक ही माने गये हैं। शून्य (०) को भ्रंक नहीं माना जाता। यद्यपि इसी की सहायता से १०, २०, ३०, १००, १०००, आदि संख्यायें लिखी जाती हैं। शून्य को यदि भ्रंक न भी माना जाय पर वह एक भ्रंक द्योतक चिह्न तो है ही। इस प्रकार कुल दस चिह्न संख्याओं को सूचित करने के लिए बनाये गए। लेकिन प्रश्न यह उत्पन्न होता है कि भ्रंक सूचक दस चिह्न ही क्यों बने ? इससे अधिक क्यों नहीं बने ? इस शंका का निवारण करते हुए पं० सुधाकर द्विवेदी ने लिखा है कि "पहले पहल गिनने के लिए अपने दोनो हाथों की अंगुलियों को काम में लाए और दशों के गिन जाने पर एक दहाई कहाई" इस युक्ति में सत्य कहाँ तक बिद्यमान है कहा नहीं जा सकता। अरस्तु (Aristotol) ने भी अपनी पुस्तक प्राब्लेमाटा (problemata) में ही ये विचार प्रस्तुत किया है। वस्तुतः इस विषय में अन्तिम मत देना कठिन है। इस मत को मानने पर एक अन्य समस्या उत्पन्न हो जाती है और वह यह है कि विश्व में सर्वत्र दस चिह्न नहीं थे। कही चार ही चिह्न थे, तो कही पाँच। हाँ हिन्दू भ्रंकों में दस चिह्न अवश्य रहे।

भ्रंकों के चिह्न दस हैं पर मूल भ्रंक जैसा कि कहा जा चुका है नौ ही हैं। इसका उल्लेख हमें वेदों में भी मिलता है—

तस्ये मे नव कोशा विष्टम्भा नवधा हिताः ।२

इस मंत्र पर टिप्पणी करते हुए पं० द्विजेंद्र नाथ झाचार्य (बम्बई) ने लिखा है — "उस भ्रंक के नव कोश हैं व विष्टम्भा एक स्तम्भ है। यद्यपि इस टिप्पणी से पूरा स्पष्टीकरण न हो पाया है, फिर भी यह संकेत उक्त मंत्र से अवश्य मिलता है कि भ्रंक नौ ही हैं। इस प्रकार के नव भ्रंक सूचक मन्त्र वेदों में कई स्थलों पर आये हैं। इन नौ भ्रंकों के सहारे ही भाष्यों ने गणना हेतु कई विशाल संख्याओं का निर्माण कर लिया था। उन विशाल संख्याओं का उल्लेख वेदों में कई स्थलों पर हुआ है। यजुर्वेद की निम्न भ्रंक श्रेणी को देखिये—

एका च मे तिस्रश्च मे तिस्रश्च मे पञ्च च मे पञ्च च मे सप्त च मे सप्त च मे नव च मे नव च मे एकादश च मे एकादश च मे त्रयोदश च मे त्रयोदश च मे

१ - पाटी गणित का इतिहास, पृ० ३।
२ - अथर्व सं०, १३।४।१०।

पञ्चदश च मे षड्विंशतिश्च मे सप्तदश च मे सप्तविंशतिश्च मे नवदश च मे नवविंशतिश्च मे एकविंशतिश्च मे एकविंशतिश्च मे त्रयोविंशतिश्च मे त्रयोविंशतिश्च मे पंचविंशतिश्च मे पंचविंशतिश्च मे सप्तविंशतिश्च मे सप्तविंशतिश्च मे नवविंशतिश्च मे नवविंशतिश्च मे एकत्रिंशच्च मे एकत्रिंशच्च मे त्रयस्त्रिंशच्च मे यत्नेन कल्पन्ताम् ॥^१

अर्थात् — एक (और दो) मेरी तीन (संख्या) मेरी तीन (व दो), मेरी पांच (संख्या) मेरी पांच (और दो) मेरी सात (संख्या), मेरी सात (और दो) मेरी नौ (संख्या) मेरी नौ (और दो) मेरी ग्यारह (संख्या) मेरी ग्यारह (व दो) मेरी तेरह (संख्या) मेरी तेरह (और दो) मेरी पन्द्रह (संख्या) मेरी पन्द्रह (और दो) मेरी सत्रह (संख्या) मेरी सत्रह (और दो) मेरी उन्नीस (संख्या) मेरी उन्नीस (और दो) मेरी इक्कीस (संख्या) मेरी इक्कीस (और दो) मेरी तेईस (संख्या) मेरी तेईस (और दो) मेरी पच्चीस (संख्या) मेरी पच्चीस (और दो) मेरी सत्ताईस (संख्या) मेरी सत्ताईस (और दो) मेरी उन्तीस (संख्या) मेरी उन्तीस (और दो) मेरी इक्कीस (संख्या) मेरी इक्कीस (और दो) मेरी तेतीस (संख्या) और आगे भी इसी प्रकार संख्या समर्थ हो ।^२ इसी प्रकार की एक अन्य श्रेणी देखिए—

अतस्त्रिंशच्च मेऽष्टौ च मेऽष्टौ च मे द्वाविंशच्च मे द्वाविंशच्च मे षोडश च मे षोडश च मे विंशतिश्च मे विंशतिश्च मे चतुर्विंशतिश्च मे चतुर्विंशतिश्च मे ऽष्टाविंशतिश्च मेऽष्टाविंशतिश्च मे द्वात्रिंशच्च मे द्वात्रिंशच्च मे षट्त्रिंशच्च मे षट्त्रिंशच्च मे अत्वारिंशच्च मे अत्वारिंशच्च मे चतुश्चत्वारिंशच्च मे चतुश्चत्वारिंशच्च मेऽष्टाचत्वारिंशच्च मे यत्नेन कल्पन्ताम् ॥^३

अर्थ— चार (और चार) मेरी आठ (की संख्या) और मेरी आठ (और चार) मेरी बारह (संख्या) और मेरी बारह (और चार) मेरी सोलह (संख्या) और मेरी सोलह (और चार) मेरी बीस (संख्या) और मेरी बीस (और चार) मेरी चौबीस (संख्या) और मेरी चौबीस (और चार) मेरी अठाईस (संख्या) और मेरी अठाईस (और चार) मेरी बत्तीस (संख्या) और मेरी बत्तीस (और चार) मेरी छत्तीस (संख्या) और छत्तीस (और चार) मेरी चालीस (संख्या) और मेरी चालीस (और चार) मेरी चवालीस (संख्या) और मेरी चवालीस (और चार) मेरी अड़तालीस (की संख्या) श्रेष्ठ कर्म^४ हेतु समर्थ हो ।

१ - यजु० सं०, १८।२४ ।

२ - स्वामी ब्रह्मचर्य कृत यजुर्वेद भाष्य, १८।२४ ।

३ - यजु० सं०, १८।२५ ।

४ - 'यज्ञो वै श्रेष्ठतमं कर्म' —श० ब्रा०, १।७।१।५ ।

उक्त दोनों मन्त्रों में क्रमशः दो व चार का सामान्य अन्तर (Common Difference) देकर तैत्तिरीय व भट्टानीय तक संख्याओं को गिनाया गया है। पहली अंक गणितीय श्रेणी (Arithmetical progression) में विषम संख्या Odd Numbers) दी गई है व दूसरी श्रेणी (Series) में सम संख्याएं दी गई हैं। इनके प्रतिरिक्त इस प्रकार की अनेकों संख्याएं वेद मन्त्रों में आती हैं। उनका संकलन वं० भल्लूराय शास्त्री ने किया है।^१

इसी प्रकार की दशोत्तर (१०, २० आदि) संख्याओं को प्रो० एल० वी० गुर्जर ने प्रस्तुत किया है।^२

इन संख्याओं तक ही धार्य सीमित नहीं रहे वरन् अत्यन्त बड़ी दशोत्तर संख्याओं का भी उल्लेख वेदों में हुआ है। यजुर्वेद संहिता में आई हुई दशोत्तर अंश श्रेणी को देखिए—

इमा मे अग्न इष्टका धेनवः सन्त्वेका च दश च दश च
 शतं च शतं च सहस्रं च सहस्रं चायुतं च चायुतं च नियुतं
 च नियुतं च प्रयुतं च प्रयुतं चायुबं च व्ययुबं च
 समुद्वश्च मध्यं चान्तरश्च पराद्वं श्वेता मे अग्न इष्टका
 धेनवः सनवमुद्रायुधिमंस्तोके ॥^३

अर्थ—हे अग्ने ज्योतिस्वरूप परमेश्वर मेरी ये यज्ञादि क्रियायें अभीष्ट फल देने वाली हों तथा ये यज्ञादि क्रियाएँ एक और एक का दश गुणित होकर १० दश और दश का दश गुणित होकर १००, और सौ का दश गुणा होकर १०००, हजार का दश गुणा होकर १०,०००, दश हजार का दश गुणा होकर १,००,००० लाख का दश गुणा होकर १०,००,००० दश लाख का दश गुणा होकर १,००,००,००० सयुद (अरब) का दश गुणा होकर १०,००,००,००० दश करोड़ का दश गुणा होकर १,००,००,००,००० सयुद (अरब) का दश गुणा होकर १०,००,००,००,००० अन्त (खरब) का दश गुणा होकर १०,००,००,००,००,००० (पराय)। उक्त प्रकार से बड़ी हुई ये मेरी यज्ञादि क्रियायें इस लोक और (परलोक) में अभीष्ट फल देने वाली हों!

१ - प्लुग्वेब रहस्य, पृ० १५८ से १६६।

२ - L. V. Gurjar, Ancient Indian Mathematics and Vedha.
 P 15-16.

३ - यजु० सं० १७।२।

यही तो है दशमिक प्रणाली का मूल । इस ग्रंथ श्रेणी में ऋषि ने १:१० के अनुपात से १०^{१२} तक की संख्या प्रस्तुत की है । इसी प्रकार की दशगुणोत्तर संख्या श्रेणियों तैत्तिरीय संहिता^१ काठक संहिता^२ व मीमांसणी संहिता^३ में पाई हैं । श्रौत सूत्र^४ में भी इसी प्रकार की दश गुणोत्तर ग्रंथ श्रेणी प्रस्तुत की गई है, लेकिन उसमें संख्याओं हेतु निम्न शब्दावली प्रयुक्त हुई है । न्यबुदं तक संख्याओं को तो वे ही नाम दिये गये हैं जो यजुर्वेद की उक्त श्रेणी में हैं । लेकिन उसके उपरान्त की दश गुणोत्तर संख्याओं हेतु क्रमशः निखर्व (समुद्र के लिए), समुद्र (मध्य के लिये), सन्तिता (घनत्व के लिए), घन्त्य (परार्थ के लिए), व घनन्त परार्थ की दशगुणिता संख्या १०^{१८} के लिये परिभाषिक शब्द प्रयुक्त हुए हैं । इसी प्रकार पंचविंश ब्राह्मण में न्यबुदं के पश्चात् निखर्व वाइव व अक्षिति संज्ञाएं क्रमशः दशगुणोत्तर संख्याओं के लिए प्रयुक्त हुई हैं । तैत्तिरीय संहिता में अन्यत्र निम्न परिभाषाएं मिलती हैं ।

दश	१०
शत	१०० (१० ^२)
सहस्र	१००० (१० ^३)
अयुत	१०००० (१० ^४)
नियुत	१००००० (१० ^५)
प्रयुत	१०००००० (१० ^६)
अबुद	१००००००० (१० ^७)
न्यबुद	१०००००००० (१० ^८)
समुद्र	१००००००००० (१० ^९)
मध्य	१०००००००००० (१० ^{१०})
घन्त्य	१००००००००००० (१० ^{११})
परार्थ	१०००००००००००० (१० ^{१२})
उपास्	१००००००००००००० (१० ^{१३})
ध्युष्टि	१०००००००००००००० (१० ^{१४})
उदेष्यत	१००००००००००००००० (१० ^{१५})
उद्यत्	१०००००००००००००००० (१० ^{१६})

१ - तै० सं० ४।४।१।४ । व ७।२।२०।१ ।

२ - का० सं० १७।१० यहां नियुत व अयुत का स्थान भेद हो गया है ।

३ - मं० सं० २।८।१४ इसमें अयुत व प्रयुत के बाद पुनः अयुत आया है, तदनन्तर न्यबुदं, समुद्र, मध्य, घन्त्य व परार्थ शब्द प्रयुक्त किए हैं ।

४ - श्रौ० सू० १५।१।४ ।

५ - तै० सं० सप्तम काण्ड, प्रपाठक दो, बीसवां अनुवाक ।

उदित	१००००००००००००००००००००० (१० ^{१७})
सुवर्ग	१००००००००००००००००००००० (१० ^{१८})
लोक	१००००००००००००००००००००० (१० ^{१९})

इसके प्रतिरिक्त बौद्ध ग्रन्थ 'ललित विस्तार' में सर्वोच्च दशगुणोत्तर सख्या तल्लक्षणा दी गई है, जिसका मान १०^{२०} होता है ।

इसके साथ ही एक अन्य बात भी ध्यान देने योग्य है और वह है ग्रंथों की व्यक्त करने की प्रणाली । उक्त पृष्ठों में सख्याओं की पारिभाषिक शब्दावली प्रस्तुत की गई है । ये पारिभाषिक शब्द संख्या विशेष की अभिव्यक्ति करते हैं लेकिन ऐसा भी देखा गया है कि कई स्थलों पर भाषा के लिए शब्दों का प्रयोग होता है । 'ऋग्वेद' में वर्ण के लिए द्वादश शब्द प्रयुक्त हुआ है—

वेदहितं जुगुपुर्द्वादशस्य ऋतुं नरो न प्र मिनस्येते ।
संवत्सरे प्राध्याकतायां तप्ता यर्मा अरनुयते विसर्गम् ॥

इसकीस ऋषियों के समूह के लिए अथर्ववेद^२ में 'त्रिपत्त' शब्द प्रयुक्त हुआ है— 'ये त्रिपत्ताः परिपति'

इसी प्रकार भाषा का प्रयोग ग्रंथों हेतु भी हुआ है । यथा —
 $\frac{१}{१६}$ की सख्या के लिए कला, $\frac{१}{१२}$ के लिए कुष्ट व $\frac{१}{८}$ के लिए शफ शब्द का प्रयोग हुआ है । शतपथ ब्राह्मण^३ में ४ के लिए कृत शब्द का प्रयोग करते हुए कहा गया है—

चतुष्टोमेन कृतेनायानामुत्तरेऽहन्नेकविशे प्रतिष्ठार्या
प्रतिष्ठित्येकविंशत्प्रतिष्ठार्या उत्तरमर्द्धं हतूनन्वारोहस्पृत्सो
वं पृष्ठान्मृतवः संवत्सर ऋतुष्वेव संवत्सरे प्रतिष्ठितः ।

इसी प्रकार ४ के लिये 'कृत' शब्द का प्रयोग तैत्तिरीय ब्राह्मण^४ में भी किया गया है— 'ये च चत्वारः स्तोमाः कृतं तत्'

याजुष ज्योतिष में १ के लिए "रूप", ४ के लिये "अथ", १२ के लिए "गुण व युग" और २६ के लिए "मसमूह" शब्दों का प्रयोग हुआ है—

१ - ऋ० सं०, ७।१०३।६ ।

२ - अ० सं०, १।१।१ ।

३ - शत० पा०, १३।३।२।१ ।

४ - तै० ब्रा०, १।५।१।१ ।

निरेकं द्वावशाम्यस्तं द्विगुणं चाप संयुतम् ।
एष्टया दष्टया युतं द्वाभ्यां पर्वणां राशिश्च वृत्ते ॥^१

पतिपि मे का वसाम्यस्तौ पर्व माशस्तमग्निगम् ।
विमज्य चयसमूहेन तिपि नक्षत्र भविष्यते ॥^२

कवस भिरभ्यस्य पर्वणि गवमिस्तिपिम् ।
युगलं बधं सप्तवीर्यां हर्तमावार्क मन्त्रमात् ॥^३

इसी प्रकार के प्रयोग मार्ग ज्योतिष में भी उपलब्ध हैं —

विषुवत् तवगुणं द्वाभ्यां वप हीनं तु षड्गुणम् ।
प्रस्तब्धं तानिपर्वणि तवर्धसातिपि भवेत् ॥^४

निरेकं द्वावशाम्यस्तं द्विगुणं गत संयुतम् ।
दष्टया दष्टया युतं द्वाभ्यां पर्वणां राशिश्च वृत्ते ॥^५

वसुस्तवष्टा मवोऽजश्च मित्रः सप्तोऽश्चिनो जलम ।
मर्मा मा को घमायाः स्युरर्धमश्च भस्तकुतुः ॥^६

साटायन श्रौत सूत्र^७ में २४ व ४८ की संख्याओं हेतु क्रमशः गायत्री (जो कि २४ वर्णों का छन्द होता है) व सामित्री (जो कि ४८ वर्णों का छन्द होता है) शब्दों का प्रयोग किया गया है।

इनके प्रतिरिक्त संख्याओं को योग, ऋण एवं गुणन द्वारा भी अभिव्यक्त किया जाता था। उसके निम्न उदाहरण मिलते हैं—

१ - या० ज्यो०, श्लोकांक १३ ।

२ - या० ज्यो०, श्लोकांक २० ।

३ - यहो, श्लोकांक २५ ।

४ - मा० ज्यो०, श्लोकांक ६१ ।

५ - मा० ज्यो०, श्लोकांक ४ ।

६ - मा० ज्यो०, श्लोकांक ६ ।

७ - सा० श्रौ० सू०, ६।४।१३ ।

योग द्वारा— ऋग्वेद^१ ३१ में ३३३६ की संख्याओं को निम्न प्रकार से व्यक्त किया गया है—

“त्रीणि दाता त्री सहस्राणि त्रिसच्च नव च”

अर्थात्— ३०० + ३००० + ३० + ६ = ३३३६ ।

ऋण द्वारा— ऋण द्वारा १६, २६, ३६ आदि संख्याओं को व्यक्त किया जाता था । यथा — एकोनविंशति अर्थात् २०-१ = १६ व एकोनचत्वारिंशत् (एक ऊन चालीस = एक कम चालीस) अर्थात् ४०-१ = ३९^२

पुण्य द्वारा—इसका उदाहरण हमें अथर्ववेद में प्राप्त होता है अथर्ववेद^३ । में २१ की संख्या को अभिव्यक्त करने के लिए कहा गया है—

त्रिसप्त अर्थात् — ३ × ७ = २१

१ - ऋ० सं० ३।६।६ व १०।५।२।३ ।

२ - तै० सं०, ७।२।११ ।

३ - अथर्व० सं० १।१।१ ।

चारों सरल नियम

अब हम चारों सरल नियमों का वैदिक साहित्य के आधार पर विवेचन करेंगे । वैदिक साहित्य में इन नियमों के लिए योग, वियोग, गुणन, भाग आदि शब्दों का प्रयोग हुआ है । वेदाङ्ग ज्योतिष में योग अथवा जोड़ के लिए युक्त व सहिस शब्द, वियोग अथवा बाकी (ऋण) के लिए ऊन शब्द, गुणा के लिए गुणन शब्द व भाग के लिए भाग शब्द का प्रयोग हुआ है । वेद मन्त्रों में इन चारों सरल नियमों का संकेत प्राप्त होता है । यजुर्वेद^१ के मन्त्र 'एका च मे' का भाष्य करते हुए स्वामी दयानन्द सरस्वती ने लिखा है— "इन मन्त्रों में यही प्रयोजन है कि अंक, बीज व रेखा भेद से जो तीन प्रकार की गणित विद्या है उनमें से प्रथम अंक जो संख्या है (१) सो दो बार गिनने से दो की वाचक होती है । इसी प्रकार एक के आगे एक तथा एक के आगे दो व दो के आगे एक आदि जोड़ने से भी समझ लेना चाहिए । इसी प्रकार एक के साथ ३ जोड़ने से ४ तथा ३ को ३ के साथ जोड़ने से ६ अथवा ३ को ३ के गुणा से $३ \times ३ = ९$ हुए । इसी प्रकार ४ के साथ ४, ५ के साथ ५, ६ के साथ ६, ८ के साथ ८ इत्यादि जोड़ने व गुणने तथा सब मन्त्रों के आशय को फैलाने से गणित विद्या मिल सकती है । जैसे ५५-६६ इत्यादि में ५ को ५ के साथ तथा ६ को ६ के साथ रखने से ज्ञान लेना चाहिए । उन मन्त्रों के अर्थों को आगे योजन करने से अंकों से अनेक प्रकार की गणित विद्या अवश्य ज्ञान लेनी चाहिये । ज्योतिष में भी जो वेदों का अंग है, इसी प्रकार मन्त्रों से गणित विद्या सिद्ध होती है यह निश्चित व असंख्यात पदार्थों से युक्त होती है ।^२ इनमें स्वामी जी ने यह बताने का प्रयास किया है कि वेदों में अंक गणित, बीज गणित व रेखा गणित का मूल विद्यमान है ।

१ - यजु० सं० १८।२४ ।

२ - ऋग्वेदादि भाष्य भूमिका, स्वामी दयानन्द सरस्वती, पृ० १४६-५० ।

चारों सरल नियमों से सम्बन्धित वैदिक काल में कौनसी विधियाँ (Methods) रही हैं, इसका उल्लेख हमें वैदिक साहित्य में नहीं मिला । हा परवर्ती लेखकों ने उन्हें परम्परागत विधियाँ ही माना है इससे यह कहा जा सकता है— कि उनमें से अधिकांश विधियाँ वैदिक काल में प्रचलित रही होंगी । अतः यहाँ संक्षेप में उन विधियों पर प्रकाश डालना समीचीन होगा ।

योग की पद्धतियाँ— योग की प्रमुख दो विधियाँ होती हैं— क्रमविधि व उत्क्रम विधि । इन विधियों का विवरण निम्नानुसार है—

१. क्रम विधि—संकलन अथवा योग की “क्रम विधि में पहले संख्याओं को प्राथमिक रीति से क्रमशः ऊपर नीचे लिखते थे, और तब सबसे नीचे (ऊपर वाली संख्या के नीचे) एक क्षैतिज रेखा खींचते थे । जिसके नीचे (ऊपर) योगफल लिखा जाता था । पहले इकाई के श्रृंखलों को जोड़ लिया जाता था । इस प्रकार योगफल की इकाई वाला श्रृंक प्राप्त हो जाता था । इसके बाद दहाई वाले श्रृंक जोड़े जाते थे और भाए हुए जोड़ में क्षैतिज रेखा के नीचे लिखी हुई दहाई को (यदि होती थी तो) जोड़ते थे, इस प्रकार योगफल का दहाई वाला श्रृंक प्राप्त होता था । इसके बाद इसी प्रकार क्रम से सैकड़ों हजार आदि के श्रृंक जोड़े जाते थे । एक प्रकारान्तर यही भी था कि जोड़ी, जाने वाली, सबसे बड़ी संख्या सबसे ऊपर लिखी जाती थी और इस संख्या को मिटा-कर योगफल के श्रृंक लिखे जाते थे ।^१

२. उत्क्रम विधि— इस विधि में सर्व प्रथम इकाई के श्रृंखलों का योगफल ले लिया जाता है । इसके उपरान्त इसी प्रकार दहाई सैकड़ों आदि के श्रृंखलों को पृथक् पृथक् जोड़ लिया जाता है फिर इन पृथक्-पृथक् योगफलों को स्थानमान के अनुसार अभिलम्बवत् लिखकर जोड़ लिया जाता है । इन दोनों विधियों का एक संयुक्त उदाहरण मनोरंजन नामक टीका में उपलब्ध है लेकिन इस रूप में प्रयोग कभी नहीं हुआ ।^२ उदाहरण निम्न प्रकार से है—

प्रश्न — २, ५, ३२, १६३, १८, १०, व १०० का योग करो ।

करण— इकाईयों का योग $२ + ५ + २ + ३ + ८ + ० + ० = २०$

दहाईयों का योग $३ + ६ + १ + १ + ० = १४$

सैकड़ों का योग $१ + ० + ० + १ = २$

३६०

१ — पाटी गणित का इतिहास, पं० सुधाकर द्विवेदी रचित, पृ० ५६-६० ।

२ — हिन्दू गणित शास्त्र का इतिहास, पृ० १२४ ।

इन दोनों विधियों की व्याख्या पं० गंगाधर ने निम्न प्रकार से की है —

“अंकानां वामतो गतिरिति वितर्कण एक स्थानादियोजनं क्रमः उत्क्रमस्तु अत्यन्तं माना दियोजनम्” अर्थात् — अंकों की गति बाईं ओर से होती है, नियम के अनुसार क्रम संकलन यह है जो इकाई में प्रारम्भ करके किया जाता है और उत्क्रम संकलन यह है जो अन्तिम स्थान से प्रारम्भ करके किया जाता है ।^१

वियोग—मंत्रबोध में से कुछ घटाने को व्यकलित (वियोग अथवा ऋण) कहते हैं और जो बचता है उम शेष कहते हैं ।^२

व्यकलित की क्रिया भी अंकों के स्थान-मान के अनुसार क्रम या उत्क्रम से की जाती है ।^३ ये विधियाँ निम्न प्रकार से हैं—

१. क्रमविधि—क्रम विधि के उदाहरण स्वरूप सीतावती के टीकाकार सूर्य दास ने १००० में से १६० घटाने की क्रिया निम्न प्रकार से की है—

यद्योक्त विधि से घटाने पर शून्य शेष (इकाई स्थान वाला)

१००० / को शून्य में से घटाने पर शून्य शेष रहा, जिसे उक्त पंक्ति
१६० / के इकाई अंक (शून्य के स्थान पर लिख लिया ।

पुनः दहाई का अंक ६ ऊपर वाली पंक्ति के ० में से नहीं घटता, अतः एक दहाई लेने पर (१० + ० = १०) १० में से घटाये जिससे ४ शेष रहे, जिसे कि दहाई के अंक (०) को मिटाकर उसके स्थान पर लिख लिया । उक्त दश को (जो लिया गया था) भागे के स्थान से घटाते हैं । चूँकि इकाई भादि का स्थान दश गुणोत्तर है अतः वियोग्य का वह अंक जो वियोजन के संगत अंक से नहीं घटाया जा सकता १० (जोड़ कर जो) घटाया जाता है और शेष प्राप्त किया जाता है और वह १० उत्तरोत्तर संख्याओं से उस समय तक लिया जाता है जब तक की उसका पूर्ण रूप से ह्रास नहीं हो जाता है । दूसरे शब्दों में ६ तक के अंक एक स्थान में लेते हैं । स्थान का अन्तर पढ़ना दश से प्रारम्भ होता है । अतएव यह ज्ञात किया जाता है कि संख्या में कितनी दहाइयाँ हैं और वह अंक जो अपने स्थान से नहीं घटाया जा सकता । वह भागे की इकाई से घटाया जाता है और शेष का ग्रहण किया जाता है ।

१ — गंगाधर कृत सीतावती टीका देखिए ।

२ — भाष्य मट कृत महासिद्धान्त, अध्याय १५, श्लोकांक २ ।

३ — भास्कराचार्य कृत सीतावती “कार्यः क्रमादुत्क्रमतोऽप्यध्याङ्ग्योरे यथास्थानं क्रमस्तरं वा ” पृ० ४ ।

); अब धागे के सेंकड़े अंक ० में से एक दहाई खी गई अतः वहां १ शेष रहे जिसमें से कि सेंकड़े का अंक ३ घटाया गया जिससे शेष ६ रहे जिसे सेंकड़े के ऊपर वाली वंक्ति के स्थान पर लिख लिया व शून्य (सेंकड़े के स्थान वाली) से एक दहाई नही ली जा सकती थी, अतः उसमें से ३ को घटाते समय सहस्र के स्थान से एक दहाई ली गई और घटाया गया। इस प्रकार ली गई दहाई सहस्र के अंक से घटाई गई और इस प्रकार सहस्र के अंक का पूर्ण ह्रास हो गया।

उक्त विधि में व्यकलन इकाई से आरम्भ किया जाता है अतः इसे क्रम विधि कहते हैं। इसमें अंकों को बार-बार मिटाया जाता है। अतः उद्योतिषी इसका प्रयोग नहीं करते थे।^१ इसके स्थान पर उत्क्रम विधि का ही प्रयोग करते थे जो अपेक्षाकृत सरल है

उत्क्रम विधि— इस विधि की व्याख्या पं० सुधाकर द्विवेदी ने निम्न प्रकार से की है।^२

मानलो :क १२७८१ में से ६६८३ को घटाना है तो जिसमें से घटाना है उस वियोज्य को ऊपर और जिसे घटाना है इस “वियोजक” को यथास्थान नीचे रखने से :

१२७८१
६६८३ | ऐसा हुआ ! अब उत्क्रम रीति में बड़े स्थान से घटाने में ऐसा बोलते हैं—दो में नव नहीं जाते (घटते) इसलिए एक को शून्य किया जाय दश, दश और दो बारह, बारह में से गए नव, रहे तीन (१२ को मार कर अर्थात् मिटाकर उसकी जगह ३ लिखते हैं) आठ में से गया आठ, रहा शून्य (ऊपर के आठ को मार कर उसकी जगह शून्य रखते हैं) एक में तीन नहीं घटता (जाता) इसलिए ऊपर के सेंकड़े के एक को किया शून्य और शून्य को किया नव धाए दश और एक स्यारह, स्यारह में गए तीन रहे आठ। ऐसा करने से बाकी (शेष) ३०६८ रहे।

उक्त दो विधियां क्रम व उत्क्रम हमारे देश में कब से प्रचलित हुई कहा नहीं जा सकता व न ही यह कहा जा सकता कि इनमें से कौन सी गौनि वैदिक काल में प्रचलित थी। लेकिन इतना अनुमान अवश्य लगाया जा सकता है कि वैदिक काल में इन विधियों के आरम्भिक स्वरूप का निर्माण अवश्य हो गया था व इनका प्रयोग

१ - पाटी गणित का इतिहास, पृ० ६३।

२ - पा० ग० ई०, पृ० ६२।

सत्कानोन गणितज्ञ करते थे । योगविधि से संख्या प्रकट करने का उल्लेख ऋग्वेद^१ में हुआ है— वहाँ कहा गया है—

‘त्रीणि दत्ता त्री सहस्राण्यग्निं त्रिंशच्च वेदा नय चासपर्यन्’

अर्थात्—

३०० त्रीणि दत्ता

३००० त्री सहस्राणि

३० त्रिंशत्

६ नव

३३३६

इसमें स्थान मान का ही विशेष ध्यान दिया गया है । अतः इससे स्पष्ट होता है कि वैदिक काल के गणितज्ञों को “अंकानाम् धामतो यतिरिति” के सिद्धान्त का ज्ञान था । व्यक्तित हेतु एकोन विधति अर्थात् $२०-१=१९$ का उल्लेख भी वैदिक साहित्य में मिलता है । योग व वियोग का संकेत अथर्ववेद में भी प्राप्त होता है—

पूर्णात् पूर्णमुवचति पूर्णं पूर्णेन सिच्यते ।

उतो तद्वत् विद्याम यतस्तत् परिपिच्यते ॥

गुणन सिद्धान्त — गुणन (multiplication) का ज्ञान भी वैदिक काल के गणितज्ञों को था । अथर्ववेद के प्रथम मन्त्र में ही “ये त्रियप्त” कह कर $७ \times ३=२१$ का बोध कराया गया है । गुणन सिद्धान्त के आधार पर ही पहाड़ों का निर्माण हुआ है । इन पहाड़ों का प्रत्यक्ष व अप्रत्यक्ष उल्लेख हमें वेदों में मिलता है । यजुर्वेद में चार के पहाड़ों का उल्लेख निम्न प्रकार से हुआ है—

धृतत्रिंशच्च मेऽष्टौ च मेऽष्टौ च मे द्वादश च द्वादश च मे
 योऽश च मे योऽश च मे त्रिंशत्त्रिंशच्च मे त्रिंशत्त्रिंशच्च मे
 चतुर्विंशत्त्रिंशच्च मे मेऽष्टाविंशत्त्रिंशच्च मेऽष्टा त्रिंशत्त्रिंशच्च मे
 द्वात्रिंशच्च मे द्वात्रिंशच्च मे द्वात्रिंशच्च मे षट्त्रिंशच्च मे
 षट्त्रिंशच्च मे चत्वारिंशच्च मे चत्वारिंशच्च मे चतुश्चत्वारिंशच्च मे
 चतुश्चत्वारिंशच्च मेऽष्टाचत्वारिंशच्च मे यतो न कल्पन्ताम् ॥^१

१ — ऋ० सं०, ३।१।६ व १०।५।६ ।

२ — अथर्व सं०, १०।८।२६ ।

३ — यजु सं०, १८।२५ ।

अर्थात्—

४	और ४ अर्थात् ४	$\times २ = ८$
८	और ४ अर्थात् ४	$\times ३ = १२$
१२	और ४ अर्थात् ४	$\times ४ = १६$
१६	और ४ अर्थात् ४	$\times ५ = २०$
२०	और ४ अर्थात् ४	$\times ६ = २४$
२४	और ४ अर्थात् ४	$\times ७ = २८$
२८	और ४ अर्थात् ४	$\times ८ = ३२$
३२	और ४ अर्थात् ४	$\times ९ = ३६$
३६	और ४ अर्थात् ४	$\times १० = ४०$
४०	और ४ अर्थात् ४	$\times ११ = ४४$
४४	और ४ अर्थात् ४	$\times १२ = ४८$

(आदि मेरे यज्ञ से सम्पन्न हो ।)

इसी प्रकार ऋग्वेद के एक मन्त्र में भी इसी प्रकार गुणन के सिद्धान्त का अप्रत्यक्ष उल्लेख हुआ है—

अग्ने त्वं पारया नभ्यो अस्मान्स्त्वस्तिमिरति दुर्याणि विभ्या ।

पूरव पृथ्वी बहुला न उर्वी भवा लोकाय सनयाम ॥ योः ॥^१

उक्त मन्त्र के “अग्ने त्वं पारया नभ्यो” में कहा गया है कि ‘हे अग्ने तू नी (के प्रक) के समान पूर्ण है। अर्थात् जैसे नी अपने पहाड़ों में विद्यमान है वैसे ही परमात्मा भी अपनी सृष्टि में सर्वत्र विद्यमान है। नी के पहाड़ों में नी की सर्व व्यापकता देखिए—

९	$\times १ = ९$	
९	$\times २ = १८$	— १ + ८ = ९
९	$\times ३ = २७$	— २ + ७ = ९
९	$\times ४ = ३६$	— ३ + ६ = ९
९	$\times ५ = ४५$	— ४ + ५ = ९
९	$\times ६ = ५४$	— ५ + ४ = ९
९	$\times ७ = ६३$	— ६ + ३ = ९
९	$\times ८ = ७२$	— ७ + २ = ९
९	$\times ९ = ८१$	— ८ + १ = ९
९	$\times १० = ९०$	— ९ + ० = ९

इसी प्रकार नौ घपने गुणोंमें से सर्वव्यापी है ।^१

इस समय गुणन की कौन सी विधि प्रचलित थी इस सम्बन्ध में कुछ भी नहीं कहा जा सकता । परवर्ती साहित्य में हमें अनेक गुणन विधियों का उल्लेख मिलता है ।^२ परवर्ती साहित्य में प्राप्त होने वाली विधियों के नाम निम्न प्रकार से हैं—

कपाट सन्धि विधि, गैलेलिया विधि, तिर्यक् गुणन विधि, स्थान स्रष्टन गुणन, गोमुद्रिका विधि, रूप स्रष्ट विधि, बीजीय विधि आदि । वैदिक साहित्य में किसी भी प्रकार की विधि की व्याख्या नहीं है । शायद उस काय में ये विधियाँ सर्वप्रचलित रही होंगी । एतत् कारण सिद्धांत ग्रन्थों में इनकी व्याख्या आवश्यक नहीं समझी गई ।

भाग— भागहार (Division) की भी यही दशा थी ।

भागहार का उल्लेख वेदों में प्रचुर रूप से है । ऋग्वेद में कहा है—

॥ गच्छध्वं ॥ यदध्वं स धी मनीसि जानताम् ।

देवा भागं ध्यां पूर्वं संजानाना उपासते ॥^३

इस मन्त्र में प्रयुक्त 'भाग' शब्द भागहार की ओर संकेत करता है लेकिन वैदिक काल में भाग की क्या पद्धति थी ? इसका उल्लेख नहीं मिलता । इसकी विधि का प्रथम उल्लेख श्रीधर कृत त्रिशतिका में प्राप्त होता है, सम्भवतः यही विधि वैदिक काल में प्रचलित थी । इसका नाम प्रचलन होता था । इसी कारण इस सिद्धांत का उल्लेख ग्रन्थों में नहीं हो सका ।

वर्गमूल— वर्ग एवं वर्गमूल (Square Root) का ज्ञान भी भार्यों को था । यद्यपि वर्ग की परिभाषा तो वैदिक साहित्य में उपलब्ध नहीं है पर वर्गाकार (Square) भवन आदि का निर्माण वे लोग करते थे । वर्ग की परिभाषा करते हुये भार्य भट्ट ने कहा है—

१ — इसकी विस्तृत व्याख्या हेतु लेखक की 'गणित सिर दर्ब अथवा मनोरंजन' पुस्तक देखिये ।

२ — इन विधियों के लिए पं० सुधाकर कृत "पाटो गणित का इतिहास" और विभूति भूषण दत्त व अथर्वेश नारायण सिंह द्वारा लिखित 'हिन्दू गणित शास्त्र का इतिहास' दृष्टव्य है ।

३ — ऋ० सं०, १०।१६।२।

“समचतुरस् प्रोर उसका क्षेत्रफल वर्ग कहलाता है। दो समान संख्याओं का गुणन भी वर्ग कहलाता है।” समचतुरस् का उत्प्रेक्ष शुब्द मूर्तों में भी हुआ है। उसका विवेचन आगे किया जायगा। वर्ग करने की विधि का संकेत हमें यजुर्वेद में मिलता है। यजुर्वेद के मन्त्र —

एक च मे तिस्रश्च मे तिस्रश्च मे पञ्च च मे पञ्च च मे सप्त च मे सप्त च मे नव च मे नव च मे एकादश च मे एकादश च मे त्रयोदश च मे त्रयोदश च मे पञ्चदश च मे पञ्चदश च मे सप्तदश च मे सप्तदश च मे नवदश च मे नवदश च मे एकविंशतिश्च मे एकविंशतिश्च मे त्रयोविंशतिश्च मे त्रयोविंशतिश्च मे पञ्चविंशतिश्च मे पञ्चविंशतिश्च मे सप्तविंशतिश्च मे सप्तविंशतिश्च मे नवविंशतिश्च मे नवविंशतिश्च मे एकत्रिंशच्च मे एकत्रिंशच्च मे त्र्यष्टिंशच्च मे यज्ञेन कल्पन्ताम् ।^२

में जो विषय ग्रंथों (odd Numbers) की श्रेणी (Numerical series) प्रस्तुत की गई है उसका सम्बन्ध वर्ग से है। वह श्रेणी निम्न प्रकार से है—

१, ३, ५, ७, ९, ११, १३, १५, १७, १९, २१, २३, २५, २७, २९, ३१, ३३ ।

इस श्रेणी के किसी भी संख्या का वर्ग ज्ञात हो सकता है। जिस संख्या का वर्ग हमें ज्ञात करना हो हमें श्रेणी के प्रथम उतने ही अंक लेने चाहिए। उन अंकों का योग ही उस संख्या का वर्ग (Square) होगा। मान लीजिये हम ६ का वर्ग ज्ञात करना है, तो श्रेणी की प्रथम ६ संख्याओं १, ३, ५, ७, ९, ११ को जोड़ लीजिए। योग फल ६ का वर्ग होगा।

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$$

$$6^2 = 36$$

इसी प्रकार ११ का वर्ग निम्न प्रकार होगा—

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 121$$

इसी प्रकार अन्य इच्छित संख्याओं का वर्ग भी ज्ञात किया जा सकता है। उक्त मन्त्र क अन्त में “यज्ञेन कल्पन्ताम्” पद आया है। इससे प्रकट होता है कि वेदी (Altar) के निर्माण में इसका उपयोग होता था। वेदी वर्गाकार होती है,

१ — ग्रामं भट्टीयम् गणित पाद श्लोकाद्भू ३ ।

२ — यजु० सं०, १८।२४ ।

अतः उस वर्गाकार वेदी के निर्माण का कार्य सम्पन्न करने के लिए ही भार्य इसका उपयोग करते थे । यजुर्वेद^१ में अन्यत्र दसगुणोत्तर श्रेणी में "घन इष्टका" पद भी आया है, जो यज्ञकुण्ड की ईंटों की ओर संकेत करता है । इससे वर्गाकार क्षेत्र की ईंटों की संख्या ज्ञात की जाती थी ।

घन :— घन की परिभाषा करते हुए भार्य भट्ट ने कहा है—

"तीन समान संख्याओं का गुणनफल तथा बारह बराबर कोणों और भुजाओं वाला ठोस भी घन है ।^२ भास्कराचार्य ने भी तीन बराबर संख्याओं के गुणनफल को ही घन कहा है—

" समन्निपातश्च घनः प्रदिष्टः "^३

घन (Cube) का ज्ञान भी वैदिक काल के गणितज्ञों को था । यजुर्वेद में कहा है—

" त्रीणि पदा विचक्रमे विद्यागुर्गोपा भवाम्यः । "^४

इस पद में तीन ओर (लम्बाई, चौड़ाई, ऊँचाई) से नापने का आदेश है । इसी से अनुमान लगता है कि भार्यों को घन फल का ज्ञान था ।

भिन्न (Fractions) :— पूर्ण अंकों की गणित के साथ-साथ भिन्न गणित का भी उपयोग वैदिक काल में होता था । भिन्न शब्द की व्युत्पत्ति "भिदिर् विदरणे" धातु से हुई है । अतः हिस्सा करने को भिन्न कहते हैं । आंगल भाषा में भिन्न के लिए (Fraction) शब्द प्रयुक्त होता है व साथ ही Root शब्द भी प्रयुक्त होता है । ये दोनों शब्द लैटिन (Latin) भाषा के क्रमशः Fractio व Ruptus शब्दों से बने हैं । इन दोनों शब्दों का अर्थ है "टूटा हुआ" । अतः पूर्ण अंकों को तोड़कर अथवा उसके हिस्से कर प्राप्त राशियों की गणित भिन्न (Fraction या Root) कहलाती है । भिन्न का उपयोग वैदिक काल में भी होता था । ऋग्वेद में $\frac{3}{4}$ की भिन्न को प्रकट करने हेतु 'त्रिपाद्' शब्द का प्रयोग हुआ है—

१ - यजु० सं०, १७।२ ।

२ - भार्य भट्टीयम् गणित पाद, श्लोकांशु ३ ।

३ - लीलावती, पृष्ठ २३ ।

४ - यजु० सं०, ३४।४३ ।

त्रिपादूर्ध्वं उदैत्युक्तः पादोऽस्येहामवत्पुनः ।
ततो विष्वङ्म्यक्रमत्साक्षनानशने अमि ॥^१

इसी प्रकार मैत्रायणी संहिता^२ में कला, कुष्ठ, शफ, पाद आदि का प्रयोग क्रमशः $\frac{1}{16}, \frac{1}{12}, \frac{1}{8}$ व $\frac{1}{4}$ की भिन्न को प्रदर्शित करने हेतु हुआ है। मुख्य सूत्रों में भी भिन्न का प्रयोग हुआ है। इनमें भिन्नो को प्रदर्शित करने की प्रणाली प्रायः वर्तमान सदृश ही है। वहाँ इकाई भंश (Numerators) वाली भिन्नो को उनके हरों (Denominators) के आगे भाग शब्द का प्रयोग कर प्रकट किया जाता था। यथा— $\frac{1}{4}$ के लिए पंचदश भाग^३ व $\frac{1}{8}$ के लिए सप्त भाग^४ व $\frac{1}{16}$ के लिए पंचभाग^५ संज्ञा प्रयुक्त हुई है। इकाई से अधिक भंश (Numerators) वाली भिन्नो को व्यक्त करने हेतु प्रथम भंश वाली संख्या व पुनः हरवाली संख्या का उल्लेख किया जाता था। यथा— $\frac{3}{8}$ के लिए त्रिमष्टम $\frac{9}{10}$ के लिए द्विसप्तम^६ आदि संख्याओं का प्रयोग मिलता है। भिन्न मिश्रित पूर्ण संख्याओं के लिए अगली पूर्ण संख्या के साथ दोनों के अन्तरवाची शब्द का प्रयोग किया जाता था। यथा— $४\frac{1}{4}$ के लिए अर्ध-पंचम शब्द का प्रयोग मिलता है।

इसमें $४\frac{1}{4}$ के बाद पूर्ण संख्या ५ ही है। व पाँच व $४\frac{1}{4}$ का अन्तर $\frac{1}{4}$ अर्ध है अतः अर्ध पंचम शब्द $४\frac{1}{4}$ के लिए प्रयुक्त हुआ।

वैदिक काल में माप तोल की इकाईयों हेतु इन भिन्नो का प्रयोग होता था। समय की गणना हेतु किया गया काल विभाजन हमें शतपथ ब्राह्मण में प्राप्त होता है जो कि निम्न प्रकार से है :—

१ वर्ष	३६० दिन ^७	अथवा	१ दिन	$\frac{3}{360}$ वर्ष
१ दिन	३० मुहूर्त	अथवा	१ मुहूर्त	$\frac{1}{36}$ दिन

१ — ऋ० सं०, १०।१०।४।

२ — मं० सं०, ३।७।७।

३ — आ० शु० सू०, १०।३।

४ — का० शु० सू०, ६।४।

५ — का० शु० सू०, ५।६।

६ — हिन्दू गणित शास्त्र का इतिहास, पृ० १७६।

७ — शत० आ०, १०।४।२।२५।

१ मुहूर्त	१५ क्षिप्र	अथवा	१ क्षिप्र	$\frac{१}{१५}$ मुहूर्त
१ क्षिप्र	१५ एतहि	अथवा	१ एतहि	$\frac{१}{१५}$ क्षिप्र
१ एतहि	१५ इदानीं	अथवा	१ इदानीं	$\frac{१}{१५}$ एतहि
१ इदानीं	१५ प्राण ^१	अथवा	१ प्राण	$\frac{१}{१५}$ इदानीं

उक्त सारणी भिन्नों का एक घनित रूप प्रदर्शित करती है। यद्यपि हमें रूप से भिन्नों को प्रदर्शित नहीं किया गया है लेकिन जैसा कि पार्श्व सारणी में प्रदर्शित है वह रूप अवश्य तत्कालीन गणितज्ञों के मस्तिष्क में था। भिन्न का स्पष्ट प्रयोग शुल्व सूत्रों में भी हुआ है।^२ $\sqrt{२}$ का मूल्य बताने हेतु निम्न भिन्न प्रस्तुत की गई है—

$$\sqrt{२} = १ + \frac{१}{३} + \frac{१}{१५} - \frac{१}{१५५}$$

वेदांग ज्योतिष में भी अनेकों समस्याएँ भिन्नों की सहायता से ही सुलझाई गई हैं। उनमें से कुछ समस्याओं (Problems) को प्रस्तुत करना समीचीन होगा—

(क) निरेक द्वादशाघ्यस्तं द्विगुणगत संयुतम् ।

पटष्ठा पाष्टम्भा युतं द्वाभ्यां पर्वणा राशिद्वयते ॥^३

भावार्थ :— सौर वर्षों में से १ घटाकर उसे १२ से गुणा करो। पूर्व सौर महीनों का जोड़कर प्राप्त योग को दो से गुणा करो इसमें सौर वर्ष प्राप्त हो जावेंगे। इसके प्रति ६० के ६० वें भाग में चन्द्र वर्ष होता है।^४

व्याख्या :— यदि क सौर वर्ष हो व ल सौर मास हो तो—

$$२[१२(क + १) + ल] = \text{सौर वर्ष}$$

$$\text{और } \frac{५३}{६०} [२(१२क - १) + ल] = \text{चन्द्र वर्ष}$$

१ - शत० आ०, १२।३।२।१ ।

२ - $\sqrt{२}$ का मूल्य बताते हुए बौद्धायन व आपस्तम्ब ने कहा है —

“प्रमाणं तृतीयेन वर्धयेत् चतुर्थेनात्मचतुर्त्रिंशोनेन सविशेषः”

इसी प्रकार $\sqrt{२}$ का मूल्य बताते हुए कात्यायन ने कहा है—

“करणी तृतीयेन वर्धयेत् च स्वचतुर्थेनात्मचतुर्त्रिंशोनेन सविशेष इति विशेषः।”

३ - या० ज्यो०, श्लोकोक्त १३। वं आ० ज्यो०, श्लोकोक्त ४।

४ - या० ज्यो० (मयंक टीका) भांगीलाल व्यास कृत।

स — भागात्पुरुष्ट काः कायोः पक्ष द्वादश को बुताः ।

एकादश गुणश्चेन शुक्लेऽर्थं चंदवा यदि ॥^१

भाष्यार्थः — जो पर्व १२ अथवा १२ के गुणक हों, उनके भाशांस = अथवा ८ के गुणक होने हैं । शेष पर्वों (जो १२ अथवा १२ के गुणक न हों) को ११ से गुणा करके भाशांस प्राप्त किए जाते हैं । शुक्ल पक्ष में चन्द्र की राशियों में स्थिति निकालने हेतु ६२ जोड़ने से भाशांस प्राप्त हो जाते हैं ।

व्याख्या :— राशियों की संख्या २७ है । सूर्य एक वर्ष में इन समस्त राशियों में से घूम जाता है । अतः ५ वर्षों में वह 27×5 राशियों में से घूम जायगा । ५ वर्षों के काल में १२४ पर्व होते हैं । अतः एक पर्व में सूर्य $\frac{27 \times 5}{124}$ राशियों में से गुजरगा अर्थात् एक पर्व में सूर्य $(1 + \frac{11}{124})$ एक पूर्ण राशि व अगली राशि के $\frac{11}{124}$ वें भाग में चला जायगा । ये अंश भाशांस कहलाते हैं ।^२

इससे प्राचीन के भिन्न सम्बन्धी ज्ञान का पता हमें लग जाता है उक्त मन्त्रों की व्याख्या के अवलोकन से यह भी ज्ञात हो जाता है कि कोष्ठकों का प्रयोग भी वे किसी न किसी रूप में अवश्य करते थे ।

शून्य :—

शून्य का आविष्कार गणित के क्षेत्र में अपना एक महत्त्वपूर्ण स्थान रखता है । इसका प्रयोग सर्व प्रथम कब व किसने किया ? इस सम्बन्ध में विद्वानों ने भिन्न-भिन्न मत दिये हैं । वास्तव में यदि देखा जाय तो शून्य का प्रयोग सर्व प्रथम भारत में वैदिक काल में होने लग गया था । वैदिक साहित्य में इसका कई स्थलों पर कई प्रकार से उल्लेख हुआ है ।

व्याकरण के अनुसार शून्य का अर्थ “शुनः संप्रसारणं वा दीर्घत्वमिति यत्” किया जाता है । अमर कोश में इसका अर्थ “शून्यं तु वशिकं तुच्छरित्तके” किया गया है । शून्य के लिए पूर्ण शब्द का प्रयोग भी मिलता है । अथर्ववेद में इसका उल्लेख निम्न प्रकार से हुआ है —

१ — या० ज्यो०, श्लोकांक १५ । व आ० ज्यो०, श्लोकांक १० ।

२ — दृष्टव्य — १० ज्यो० मयंक टीका (हस्तलिखित) ।

पूर्णात् पूर्णमुदचति पूर्णं पूर्णेन सिध्यते ।
उतो तवद्य विद्याम यतस्तत्परिधिच्यते ॥^१

अर्थात् :— पूर्ण से पूर्ण उदय होता है पूर्ण को पूर्ण ही जीवन देता है । अब प्राग हम उसको जानें जिससे वह चारों ओर सींचा जाता है । इसी प्रकार बृहदारण्यक उपनिषद् में भी इसका उल्लेख हुआ है—

पूर्णमवः पूर्णमिदं पूर्णात् पूर्णमुदच्यते ।
पूर्णस्य पूर्णमादाय पूर्णं मेवावशिष्यते ॥^२

अर्थात् :— वह पूर्ण है । यह पूर्ण है, पूर्ण से पूर्ण ही उत्पन्न होता है । पूर्ण के पूर्ण को निकालने पर (अर्थात् घटाने पर) पूर्ण ही शेष रहता है ।

इन मन्त्रों के आध्यात्मिक पक्ष को छोड़कर यदि हम भौतिक व्याख्या करें तो इनमें निम्न निष्कर्ष निकलता है—

$$\begin{array}{l} \circ + \circ = \circ \\ \circ - \circ = \circ \\ \circ \times \circ = \circ \end{array}$$

इसी पूर्ण की सहायता से तो दशगुणोत्तर संख्याओं की गणना की जाती थी । जिसका उल्लेख पिछले पृष्ठों में हुआ है । इससे स्पष्ट हो जाता है कि शून्य का आविष्कार वैदिक काल में ही हो गया था व इसकी सहायता से गणित की समस्याएँ सुलझाई जाती थी । परवर्ती भारतीय गणित साहित्य में तो शून्य पर ग्रन्थ तक लिखे मिलते हैं ।

२ — अथर्व० सं०, १०।८।२६ ।

३ — बृहद० उ०, ५।१।१ ।

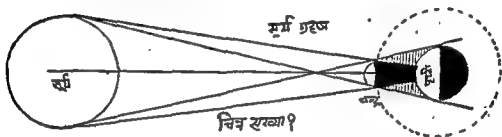
रेखा गणित

मंक गणित की भांति वैदिक काल में रेखा गणित का भी काफी विकास हो गया था। रेखा गणित के लिए उस समय क्षेत्र गणित या क्षेत्र विद्या शब्द प्रयुक्त होते थे। क्षेत्र विद्या अथवा क्षेत्र गणित शब्द से ही स्पष्ट हो जाता है कि यह वह शास्त्र है, जिसमें स्थान विशेष की नाप जोख सम्बन्धी गणना की जाती है। नाप जोख मात्र भूमि की ही नहीं की जाती थी वरन् समूचे ब्रह्माण्ड की नाप जोख इस शास्त्र में सम्मिलित थी। इस दृष्टिकोण से प्राधुनिक रेखा गणित की अपेक्षा वैदिक रेखा गणित का क्षेत्र (Scope) अधिक विस्तृत था। सूर्य, चन्द्र, ग्रहों, उपग्रहों आदि की स्थिति सम्बन्धी गणित 'क्षेत्र गणित' के क्षेत्रांतर्गत ही होती थी। क्षेत्र विद्या की आवश्यकता सामान्यतया वेदी निर्माण कार्य के लिए पड़ती थी। पादचार्य रेखा गणित का प्रारम्भिक क्षेत्र (Scope) अत्यन्त सीमित था। उसका विकास बहुत बाद में हुआ। इसके क्षेत्र की सीमितता का अनुमान इसके नाम से ही लग जाता है। प्राग्ल भाषा में रेखा गणित को ज्योमेट्री (Geometry) कहा जाता है। यह शब्द दो शब्दों से मिल कर बना है, वे हैं जिओ(Geo) व मेट्री(metry)। जिओ का तात्पर्य भूपटल से है व मेट्री का अर्थ नापने से है। इस प्रकार भूमि नापने जोखने की विद्या को ज्योमेट्री कहा गया। क्षेत्र गणित का उल्लेख ऋग्वेद में हुआ है। ऋग्वेद में कहा गया है कि—

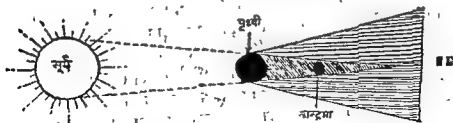
यत्त्वा सूर्य स्वर्मानुस्तमसाविध्यदासुरः ।
अक्षेत्रविद्यया मुग्धो भुवनान्यदीपयुः ॥^१

अर्थात्—“जब सूर्य को विध्यद् असुर अर्थात् चन्द्रमा ने ढांप कर ग्रन्थकार मय कर दिया तो क्षेत्र विद्या को नहीं जाननेवाला (यह देख कर) उन्मत्त हो गया।”

इस मन्त्र से स्पष्ट हो जाता है कि आर्यों को रेखा गणित का ज्ञान था व ग्रह गणित को भी क्षेत्र गणित के अन्तर्गत ही मानते थे । इस मन्त्र से यह भी ज्ञात हो जाता है कि सूर्य ग्रहण के मूल सिद्धान्त (Fundamental principle) से वे परिचित थे । सूर्य चन्द्र व पृथ्वी तीनों जब एक ही रेखा की स्थिति में आ जाते हैं, व चन्द्रमा, सूर्य पृथ्वी के मध्य होता है उस दशा में चन्द्रमा की छाया पृथ्वी पर पड़ती है अथवा प्रकारान्तर से यों कहा जायेगा कि चन्द्रमा के बीच में आ जाने से सूर्य पूरा दिखाई नहीं देता है । उसका कुछ भाग काला (समाच्छादित) दिखाई देता है, जैसा कि चित्र संख्या एक में दिखाया गया है ।



सूर्य ग्रहण का तो स्पष्ट अन्तर्गत उस मन्त्र में हो ही गया है । लेकिन आर्यों को वृत्त कि सूर्य ग्रहण का ज्ञान था, अतः निश्चित रूप से उन्हें चन्द्र ग्रहण का भी ज्ञान था और वे जानते थे कि पृथ्वी जब सूर्य व चन्द्र के बीच में आ जाती है, उस समय पृथ्वी की छाया चन्द्रमा पर पड़ती है और चन्द्रमा समाच्छादित हो जाता है । जैसा कि चित्र संख्या दो में दिखाया गया है —



इन ग्रहणों के सम्बन्ध में निश्चित रूप से चन्द्र व पृथ्वी की गति सम्बन्धी गणना भी आर्य करते थे । इससे उन्हें गति शास्त्र (Dynamics) व स्थिति शास्त्र (Statics) का भी ज्ञान था, यह सुनिश्चित होता है । क्योंकि इनके अभाव में ग्रहण गणित सम्भव नहीं । सम्भवतः स्थिति शास्त्र (Statics) व गति शास्त्र (Dynamics) दोनों ही क्षेत्र गणित की ही शाखाएँ थीं ।

रेखा गणितोप परिभाषाएँ

वैदिक साहित्य से हमें रेखा गणित के कतिपय परिभाषिक शब्द भी उपलब्ध होते हैं । यजुर्वेद में कहा है—

को अस्य वेद भुवनस्य नाभि को छावापृथिवी अन्तरिक्षम् ।

कः सूर्यस्य वेद बृहतो जनित्रं को वेद चन्द्रमसं यतोजाः ॥^१

अर्थात्— “कोन इस विश्व के केन्द्र को जानता है ? सूर्य भूमि, चन्द्रलोक व सौर परिवार आदि को कौन जानता है, उत्पन्न करता है व प्रकाशित करता है ? उक्त प्रश्नों का उत्तर देते हुए कहा गया है कि —

वेदाहमस्य भुवनस्य नाभि वेद छावापृथिवी अन्तरिक्षम् ।

वेद सूर्यस्य बृहतो जनित्रमयो वेद चन्द्रमसं यतोजाः ॥^२

अर्थात् — मैं इस पृथ्वी का केन्द्र जानता हूँ । सूर्य व चन्द्र के उत्पत्ति कर्त्ता प्रकाशमान कर्त्ता को भी जानता हूँ ।

इस पर जिज्ञासु पुनः प्रश्न करता है —

पृच्छामि स्वा परमन्तं पृथिव्याः पृच्छामि यत्र भुवनस्य नाभिः ।

पृच्छामि स्वा वृष्णो अश्वस्य रेतः पृच्छामि वाचः परमं व्योम ॥^३

अर्थात् — “हे विद्वान् ! मैं आपसे पृथ्वी का परम् अन्त पूछता हूँ व यह पूछता हूँ कि इस पृथ्वी का केन्द्र कहाँ है ? सेचनकर्त्ता बलवान् पुरुष का पराक्रम पूछता हूँ व वाणी के उत्तम आकाश रूप स्थान को पूछता हूँ ।”

इस पर विद्वान् उत्तर देता है—

इयं वेदिः परी अन्तः पृथिव्या अयं यतो भुवनस्य नाभिः ।

अयं सोमो वृष्णो अश्वस्य रेतो ब्रह्मण्यं वाचः परमं व्योम ॥^४

अर्थात् — “यह वेदी ही पृथ्वी का परम अन्त है व यह यज्ञ ही विश्व का केन्द्र है । यह सोम ही पराक्रम कर्त्ता का बल है । यह ब्रह्मा का उत्तर स्थान है ।

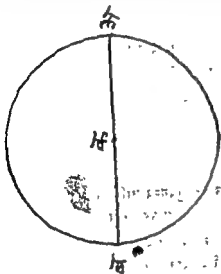
१ - यजु० सं०, २३।५६ ।

२ - वही, २३।६० ।

३ - वही, २३।६१ ।

४ - वही, २३।६२ ।

इन मन्त्रों से वृत्त (Circle) व गोले (Sphere) के ज्ञान का परिचय मिलता है। हम जानते हैं कि वृत्त का कोई अन्त नहीं। वृत्ताकार पथ पर यात्रा करने पर हम घूम कर पुनः उसी स्थान पर आजाते हैं, जहाँ से हमने यात्रा आरम्भ की थी। इसे इस प्रकार भी कहा जा सकता है कि आरम्भ ही अन्त है। इसी कारण विद्वान् जिज्ञासु के प्रश्न का उत्तर देते हुए कहता है कि यही स्थान जहाँ हम खड़े हैं वही पृथ्वी का अन्त है। जब जिज्ञासु द्वितीय प्रश्न करता है कि इस पृथ्वी का मध्य कहाँ है? तो इस पर भी विद्वान् प्रत्युत्तर देता है कि जहाँ यज्ञ हो रहा है, वही इस पृथ्वी का मध्य है। वस्तुतः वृत्त पर कोई भी मध्य बिन्दु वृत्त का मध्य हो सकता है। यदि उस बिन्दु से कोई एक रेखा केन्द्र में से होती हुई खींची जाय तो यह वृत्त को समद्विभाजित करेगी। चित्र संख्या तीन को देखिए —



दिए गए वृत्त पर एक बिन्दु 'म' है। 'म' से एक रेखा वृत्त के केन्द्र 'क' में से होती हुई खींची गई है जो वृत्त को दूसरी ओर 'ब' बिन्दु पर काटती है। यह 'म' 'ब' रेखा वृत्त को समद्विभाजित करती है। यह वृत्त का व्यास (Diameter) भी है।

इसी प्रकार ऋग्वेद में भी रेखा गणित की कुछ पारिभाषिक शब्दावलि उपलब्ध होती है। ऋग्वेद में कहा है —

कासीध्रमा प्रतिमा कि निदानमाज्यं किमासीत्परिधिः क भासीत् ।^१

अर्थात् — प्रमा कितनी है? प्रतिमा क्या है? व परिधि कितनी है? इसमें प्रमा, प्रतिमा व परिधि तीनों शब्द रेखा गणित के ही पारिभाषिक शब्द हैं। इसके अतिरिक्त एक स्थान पर तीन वृत्तों का वर्णन आया है।

धर्मो समन्ता त्रिवृतं व्यापतुस्तथोर्जुष्टिं मातरिश्वा जगाम ।

दिवस्पथो दिविपारणा अवेपन्विदुर्देवाः सहसामानमकम् ॥^२

१ - ऋ० सं०, १०।१३०।३।

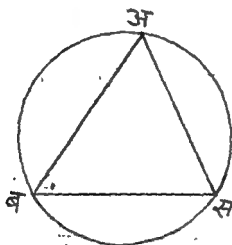
२ - ऋ० सं०, १०।११४।१।

इसी प्रकार ऋग्वेद में एक स्थान पर वृत्तान्तर्गत त्रिभुज का वर्णन हुआ है—

त्रीणि पदा वि चक्र मे विष्णुर्गोपा प्रदान्यः ।

अतो धर्माणि धारयन् ॥^१

उक्त मन्त्र में प्रथम पाद में एक चक्र (वृत्त) के तीन पद (बिन्दु) का उल्लेख है। इन तीनों बिन्दुओं को मिलाने से वृत्त के अन्तर्गत त्रिभुज बन जायेगा। चित्र क्रमा ४ देखिए—



उक्त वृत्त पर अ, ब, स, तीन बिन्दु हैं, जिन्हें मिलाने से वृत्तान्तर्गत त्रिभुज का निर्माण हो जायगा। इन संकेतों से ज्ञात होता है कि धर्मों ने रेखा गणितीय ज्ञान भी प्राप्त कर लिया था। इसका प्रयोग वे अपने जीवन के सामान्य व्यवसाय में किया करते थे। भवनों का निर्माण, रथों का निर्माण, नौकाओं का निर्माण आदि व्यवसायों में इसका प्रयोग किया जाता था। क्योंकि रेखा गणितीय ज्ञान के अभाव में इनका निर्माण सम्भव नहीं। ऋग्वेद में अनेकों खम्भों व द्वारों वाले भवनों का उल्लेख हुआ है। उसमें उन्हें प्रत्येक स्तम्भ का आयतन समान रखना पड़ता होगा। क्योंकि समान आयतन के अभाव में भवन के सौन्दर्य एवं दृढ़ता का निर्वाह नहीं हो सकता था। वन की सिड़कियों का भी क्षेत्रफल समान रखा जाता था। इस प्रकार इस कार्य में उन्हें रेखा गणित की सहायता निश्चित रूप से लेनी पड़ती थी।

इसी प्रकार रथ निर्माण व नौका निर्माण में भी उन्हें रेखा गणितीय (Geometrical) ज्ञान की आवश्यकता रहती थी। रथों में लगने वाले पहियों (Wheel) का

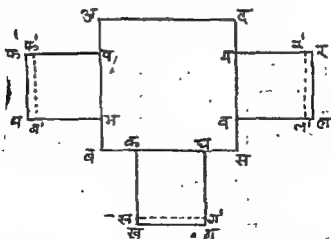
क्षेत्र फल समान होना आवश्यक है। समान क्षेत्र फल के अभाव में रथ का उपयोग सही ढंग से नहीं हो सकता है। इसी प्रकार नौकाओं के लिए समतुल्यता (Symmetry) का ध्यान रखना आवश्यक था। इस प्रकार वे अपने उपयोग की प्रायः समस्त वस्तुओं में रेखा गणित के सिद्धान्तों का प्रयोग करते थे।

रेखा गणित व वेदी विज्ञान —

रेखा गणितीय सिद्धान्तों की विस्तृत व्याख्या हमें वेदों के व्याख्या ग्रन्थ ब्राह्मणों व शुल्ब सूत्रों में प्राप्त होती है। शुल्ब सूत्रों में वेदी विज्ञान (Altar Science) प्रकरण के अन्तर्गत रेखा गणित के अनेकों माध्य (Theorem) व प्रमेयों का विवेचना कर दी गई है। कृष्णयजुर्वेद में कई वेदियों का नामोल्लेख हुआ है। इन वेदियों के निर्माण में रेखा गणित के सिद्धान्तों की आवश्यकता रहती थी। वर्तमान में सामान्यतया एक, दो प्रकार की वेदियाँ बनाते हैं लेकिन उस काल में बनाई जाने वाली वेदियों के नाम कृष्ण यजुर्वेद में चतुर्भुज, द्येन, वक्र पक्ष, व्यस्त पुच्छ, कंक चित् अजल चित्, प्रथम चित्, अमा चित् आदि आदि बताये गये हैं। ये वेदियाँ प्रथिवीतलः द्येन पक्षी (बाज) के शरीर के आकार पर आधारित होती थी। इन वेदियों के निर्माण की विधि शुल्ब सूत्रों में दी गई है।

द्येन चित् वेदी व उसका निर्माण

इस काल में द्येनचित् वेदी का विशेष प्रचार था। इसका आकार निम्न प्रकार में होता था।



उक्त चित्र में 'म' 'व' 'स' 'द' पक्षी का शरीर है जिसमें कि एक एक पुरुष के चार वर्ग समाहित हैं। 'प' 'फ' 'व' 'भ' व 'य' 'र' 'ल' 'व' दो पंख की लम्बाई एक पुरुष प्रदेश व चौड़ाई एक पुरुष है। वहाँ यह स्पष्ट कर देना आवश्यक है कि एक पुरुष दस प्रदेश के बराबर होता है। पंखों के तप की ही पूंछ (पुच्छ) 'क' 'ख' 'ग' 'व' है।

ऐसी कई प्रकार की वेदियों का निर्माण भायें करते थे व इन्हीं वेदियों की रचना (Construction) के आधार पर अनेकों रेखा गणितीय साध्यों का (Geometrical theorems) प्रतिपादन भी वैदिक काल के गणिताचार्यों द्वारा हुआ। गोलवेदी के समान क्षेत्रफल वाली आयताकार वेदी का निर्माण भी वे कर सकते थे। इसके साथ ही गोल वेदी को समान क्षेत्रफल वाली वर्गाकार वेदी में भी परिणत कर सकते थे। डा० चौव् ने भी लिखा है कि "याज्ञिकों को यह जानना अनिवार्य था कि यज्ञ कुण्ड के निर्माण में वे जो एक वर्ग के बराबर बनाते हैं, उसे दो या तीन वर्गों के बराबर कैसे बनाया जाय ? अथवा नियत वर्गों को आयतों के आकार में किस प्रकार परिणत करना चाहिए, नियत त्रिभुजों के बराबर वर्ग व आयत किस प्रकार बन सकते हैं, एक घृत एक नेत्रित वर्ग के मगमग कैसे बनता है ?" वैदिक साहित्य में रेखागणित की अनेको जटिल समस्याओं (Problems) का हल (Solutions) मिलता है। उनमें से कुछ समस्याओं पर हम निम्न पृष्ठों में विचार करेंगे।

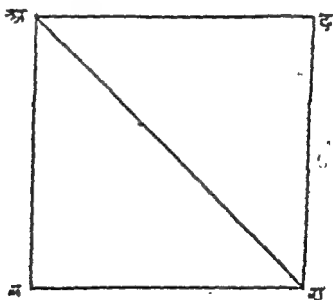
इस प्रसंग में हम सर्व प्रथम उस सिद्धान्त की व्याख्या करेंगे जिसे पामतीर पर पाइथागोरस का सिद्धान्त (Pythagorean Theorem) कहते हैं। कुछ विद्वानों की यह मान्यता है कि यूनानी गणितज्ञ पाइथागोरस जिसके कि नाम से यह सिद्धान्त अथवा साध्य प्रसिद्ध है, भारत आया था व भारत में रहकर स्थानीय गणितज्ञों से शिक्षा प्राप्त की। मुख्य सूत्रों के सिद्धान्तों का भी उसने अध्ययन किया। पुनः स्वदेश लौटकर उसने इन भारतीय सिद्धान्तों का प्रचार किया। कुछ विद्वान् इसे यूनानी भी स्वीकार नहीं करते। उनका कथन है कि यह भारतीय गणितज्ञ ही था व इसका मूल नाम पुष्यीगुरु था। इसने विदेशों में जाकर गणित के सिद्धान्तों का प्रचार किया। यूनानियों ने इसके नाम पुष्यीगुरु को पाइथागोरस उच्चारित किया। वास्तव में पिछला मत कुछ उचित प्रतीत होता है। भारतीय नामों का उच्चारण यूनानी इसी प्रकार करते हैं। चन्द्रगुप्त को सन्द्रकोट्टस अथवा इण्डोकोट्टस, पाटली-पुत्र को पालीत्रोय, श्रीकृष्ण को हिरीबलीत्र आदि त्रिकृत नामों से मेगस्थनीज ने अपनी पुस्तक इंडिका में पुकारा है। इससे ऐसा प्रतीत होता है कि वास्तव में पुष्यी-गुरु नामक किसी भारतीय गणितज्ञ को उन्होंने पाइथागोरस के नाम से भवना लिया था। इस सम्बन्ध में निश्चित रूप से कुछ भी नहीं कहा जा सकता। लेकिन यह तो निश्चित रूप से कहा जा सकता है कि जिस सिद्धान्त को पाइथागोरस के नाम पर पाइथागोरस का सिद्धान्त कहा जाता है, वह पाइथागोरस से शताब्दियों पूर्व भारत में आविष्कृत हो चुका था। मुख्य सूत्रों में इन सिद्धान्त का सर्व प्रथम प्रतिपादन हुआ। अतः इसे "मुख्य सूत्री सिद्धान्त" कहना ही उचित है। बोझाचन ने अपने मुख्य सूत्र में इस सिद्धान्त को निम्नानुसार प्रतिपादित किया है —

“ शीर्षेयपुरवसायलया रज्जुः पार्वमानो तिर्यङ्मानी च
 यत्पृथग्भूते कुरुतस्तत्पुमर्षं करोति ”

इसी बात की व्याख्यानमें अपने मुख्य सूत्र में निम्न प्रकार से व्यक्त किया है।

“ शीर्षेयपुरवसाय रज्जुः पार्वमानो तिर्यङ्मानी च ।
 यत्पृथग्भूते कुरुतस्तत्पुमर्षं करोति ”

उक्त दोनों वाक्यों के अर्थ का भाव यह है कि एक आयत (Rectangular) के वर्ग () का वर्ग आयत की लम्बाई व चौड़ाई के वर्ग (लम्बाई व चौड़ाई के वर्गों के योग) की प्रस्तुत करता है। इसे निम्न चित्र द्वारा समझा जा सकता है।



यह आयत 'अ, इ, उ, ए' में 'अ उ' उभय वर्ग है। अतः इस वर्ग के क्षेत्रफल के अनुपात—

$$(अ उ)^2 = (अ इ)^2 + (इ उ)^2 \text{ या } (अ इ)^2 \times (इ उ)^2$$

इस आयत () के क्षेत्रफल () के वर्ग में बँटता है।

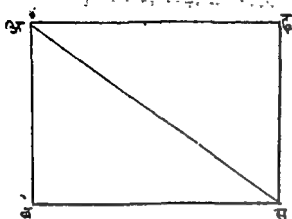
समस्तपुनरवसायलया रज्जुः पार्वमानो तिर्यङ्मानी च ।

१ - व व्याख्यान व व्याख्यान में इसे निम्न प्रकार से उक्त किया है—

(१) “ शीर्षेयपुरवसायलया रज्जुः पार्वमानो तिर्यङ्मानी च ” — व्याख्यान

(२) “ शीर्षेयपुरवसायलया रज्जुः पार्वमानो तिर्यङ्मानी च । ” — व्याख्यान

अर्थात् — एक वर्ग के कर्ण का वर्ग उस वर्ग से दुगने क्षेत्र को प्रस्तुत करता है । इस सिद्धान्त को निम्न चित्र द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है—



उक्त अ, ब, स, द वर्गों में अ, स कर्ण है अतः

$(अ स)^2 = २ (ब स)^2$ अथवा $२ (अ ब)^2$ आदि । बीदायन ने इस सिद्धान्त के आधार पर एक श्रृंखला सारिणी भी दी है जो निम्न प्रकार से है—

“त्रिचतुष्कयोर्द्वादशिकपञ्चकयोः पञ्चदशिकाष्टिकयोः सप्तिक चतुर्विंशकयो-
द्वादशिकपञ्चत्रिशिकयोः पञ्चदशिकाष्टिकयोः सप्तिक चतुर्विंशकयोर्द्वादशिकपञ्च-
त्रिशिकयोः पञ्चदशिकपद् त्रिशिकयोरित्येतासुपलब्धिः ।”

अर्थात् —

$$\begin{aligned}(३)^2 + (४)^2 &= (५)^2 \\ (१२)^2 + (५)^2 &= (१३)^2 \\ (१५)^2 + (८)^2 &= (१७)^2 \\ (७)^2 + (२४)^2 &= (२५)^2 \\ (१२)^2 + (३५)^2 &= (३७)^2 \\ (१५)^2 + (३६)^2 &= (३९)^2\end{aligned}$$

इसके प्रतिरिक्त आपस्तम्ब एक और समीकरण (equation) देता है —

$$(१५)^2 + (२०)^2 = (२५)^2$$

कात्यायन इससे भी एक और अधिक कदम लेता हुआ कहता है कि—

“पद त्रियंङ्मानी त्रिपदा पाशवंमानी तस्याकण्वारज्जुर्वंशकरणी”

अर्थात्—

$$(१)^2 + (३)^2 = १०$$

य “ द्विपदा तिर्थेष्ट्मानो त्रिपदा पार्श्वमानो तस्याक्षर्या षड्भुजचतुर्विधत्करणी । ”

अर्थात्— $(2)^2 + (6)^2 = 40$

कात्यायन व आपस्तम्ब ने इसी प्रसंग में निम्न सूत्र भीर दिए हैं—

[i] “ अर्धप्रमाणेन पाव प्रमाणं विधीयते ”

अर्थात् — $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

[ii] “ तृतीयेन नवमी कला ”

अर्थात् — $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$

[iii] “ चतुर्थेन षोडशी कला ”

अर्थात्— $(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$ आदि ।

इस प्रकार पाइथागोरस के नाम से प्रसिद्ध इस शुल्ब सूत्रीय सिद्धान्त की काफी विस्तृत व्याख्या हमें शुल्ब सूत्रों से प्राप्त हो जाती है ।

दो असमान वर्गों को जोड़ना व घटाना :—

उक्त पाइथागोरस के नाम से जाने जाने वाले सिद्धान्त के अलावा अनेक रेखा-गणितीय रचनाएं (Geometrical constructions) हमें शुल्ब सूत्रों में प्राप्त होते हैं । इनमें से कुछ का विवेचन यहाँ किया जायगा । दो असमान क्षेत्रफल वाले वर्गों को जोड़ने की विधि पर प्रवाद डालते हुए आपस्तम्ब ने कहा है—

शुल्बयोश्चतुरस्योरुक्तः समासः ।

नाना प्रमाणयोश्चतुरस्योः समासः ।

हृत्सीयसः करण्या वर्धोयसो बृध्रमुल्लिखेत् ।

बृध्रस्याक्षर्यायारज्जुस्थमे समस्त्यति ॥^१

व्याख्या :—इस क्रिया को निम्न चित्र द्वारा समझा जा सकता है ।

१ — बौद्धायन व कात्यायन ने इस क्रमशः निम्न-प्रकार से व्यक्त किया है—

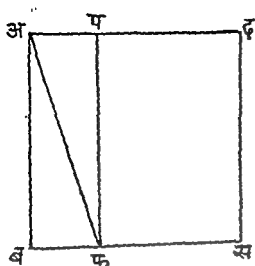
(i) नाना चतुरस्रे समस्य नकनीयसः करण्याः करण्या वर्धोयसो ।

बृध्रमुल्लिखेत् बृध्रस्याक्षर्यायारज्जुः समस्तया पार्श्वमानो भवति ।

(ii) समचतुरस्राणामुक्तः समासः । नाना समासे ह्रसायसः करण्यावर्धोयोऽपि-

च्छिन्नात्तस्याक्षर्यायारज्जुर्भवेत्यतीति समासः ।

रेखा गणित ।



अ, ब, स, द और क, ख, ग, प दो समान वर्ग हैं। इन्हें हमें मिलाना है।

रचना :—‘अ’, ‘द’ में से ‘अ’, ‘प’ = ‘क’, ‘ख’ और ‘ब’, ‘स’ में से ‘ब’, ‘क’ = ‘ख’, ‘ग’ काटा। ‘प’, ‘क’ को मिना दिया और ‘अ’, ‘क’ को भी मिला दिया, ‘अ’, ‘क’ का वर्ग ‘अ’, ‘ब’, ‘ख’, ‘द’ + ‘क’, ‘ख’, ‘ग’, ‘ब’ के दोनफल के बराबर होगा।

क्योंकि

$$(अ क)^2 = (ब क)^2 + (ब अ)^2$$

लेकिन

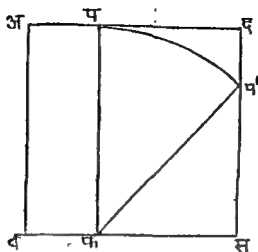
$$(ब क)^2 = (ख ग)^2$$

$$\text{इसलिए } (अ क)^2 = (ख ग)^2 + (ब अ)^2$$

इसी प्रकार दो समान क्षेत्रफल वाले वर्गों का अन्तर ज्ञात करने की विधि का उल्लेख भी श्रुत्व सूत्रों में हुआ है। इस सम्बन्ध में बौद्धायन ने बताया है कि—

चतुरास्रञ्चतुरस्रं निमिहीर्यन्या यत्रिः जिहोपेतस्यकरण्यावर्षोप्रसो धूम्रमुत्ति-
खेदधूम्रस्य पारवमानीक्षणयेरतत्पारवमुपसंहरेत्मा निपेतत्तवपच्छिन्ताच्छिन्नया
निरस्तम् ।

व्याख्या :—इस क्रिया को निम्न चित्र द्वारा समझा जा सकता है—



अब स द और क ख ग घ दो वर्ग हैं। दोनों का क्षेत्रफल मतलब-मतलब है। इन दोनों का मन्तर-जात करना है। इसके लिए वर्ग अ ब स द में से क ख ग घ वर्ग की भुजा-ख ग के बराबर, फ स काटा गया। स द भुजा के समान्तर फ प रेखा खींची। पुनः फ को केन्द्र मानकर एक चाप खींचा जो स द को प' पर काटता है—

$$फप = प'फ$$

$$(प'फ)^2 = (फस)^2 + (सप')^2$$

$$\text{चूँकि } फप' = फप = स द$$

$$\text{और } फस = खग$$

$$(सद)^2 - (खग)^2 = (सप')^2$$

$\sqrt{2}$ का मूल्य [Value] ज्ञात करना:— $\sqrt{2}$ का मूल्य गणितीय क्षेत्र में एक जटिल एवं विवादास्पद समस्या बनी हुई है। वैदिक काल के गणितज्ञों ने भी इस ओर प्रयास किया था व $\sqrt{2}$ का वर्ग-मूल निकालने में वे सफल भी रहे। बोधायन ने अपने शुल्ब सूत्र में इस सम्बन्ध में कहा है—

“प्रमाणं तृतीयेन वर्धयेत्तच्चतुर्थेनात्मचतुस्त्रिंशोनेन सविशेषः”

कात्यायन ने भी यही कहा है—

“करणी क्षेत्रायाम् तृतीयेन स्वतृतीयांशोनेनसविशेषः इतिविशेषः”

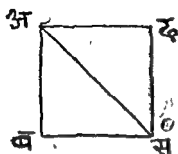
अर्थात्—इकाई भाग में उसके एक तिहाई की वृद्धि कीजिये। पुनः कुल में से एक तिहाई के चतुर्थांश का तृतीयांश भाग घटा दीजिये। यह सविशेष है। यदि करणी एक हो तो विकर्णी निम्न होगी—

$$१ + \frac{१}{३} + \frac{१}{३.४} - \frac{१}{३.४.३४}$$

चित्र संख्या १० को देखिये । अ व स दं एक वर्ग है जिसमें—

$$अ व = १$$

$$अ स = \sqrt{२}$$



डा० बीजू व जी० आर० के० ने इसकी पुष्टि का प्रयास किया लेकिन वे कुछ हल नहीं निकाल सके । प्रो० एल० बी० ग्रुजर ने इस सिद्धान्त की पुष्टि निम्न प्रकार से की है—

अध्यर्ध पुरुषा रज्जुर्द्वौ स्यादौ करोति

अर्थात् १ और $\frac{१}{२}$ पुरुष वर्ग दो व चौथाई $२\frac{१}{२}$ के बराबर होता है—

$$\left(१ + \frac{१}{२} \right)^२ = २ \frac{१}{२}$$

इसी प्रकार

$$\left(१ + \frac{१}{३} \right)^२ = \frac{१६}{९}$$

$$\text{और } २ - \frac{१६}{९} = \frac{२}{९}$$

इसमें एक ऐसी संख्या जोड़ी जाय कि उक्त संख्या का योग २ हो जाय । माना वह संख्या क है तो—

$$\left(१ + \frac{१}{३} + क \right)^२ = \frac{१६}{९} + \frac{८क}{३} + क^२$$

क^२ को छोड़ दिया क्योंकि वह अत्यन्त लघु संख्या होगी ।

इससे—

$$\frac{८}{३} क = \frac{२}{९}$$

$$क = \frac{१}{१२} = \frac{१}{३.४}$$

क का मान रखने पर

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} \quad \text{इसका वर्ग करने पर}$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} = \left(\frac{10}{12}\right)^2 = \frac{25}{144}$$

$$2 - \frac{25}{144} = \frac{1}{144}$$

अब एक नवीन संख्या 'ख' मान ली जाय तो—

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} + \text{ख}\right)^2 = \left(\frac{10}{12} + \text{ख}\right)^2$$

$$= \frac{25}{144} + \frac{8\text{ख}}{12} + \text{ख}^2$$

ख² को त्यागने पर (क्योंकि यह अत्यन्त छोटी संख्या है) —

$$\frac{8\text{ख}}{12} = -\frac{1}{144}$$

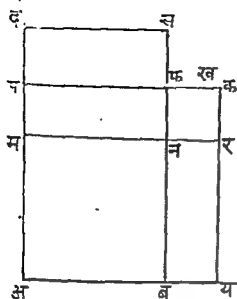
$$\text{या ख} = -\frac{1}{3.4.36} \quad \text{अतः } \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.36}$$

धायत को समान क्षेत्रीय वर्ग में परिणित करना :—धायत को समान क्षेत्रफल वाले वर्ग में परिणित करने की विधि पर प्रकाश डालते हुए बोद्धायन ने अपने मुख्य सूत्र में कहा है—

“दीर्घं चतुरस्रं त्रिकोर्धस्तिर्यङ्मानी करणी कृत्वा शेषं द्वेषा विमण्य विपर्य-
स्येतरमोपबध्नात् खण्ड भावायेन तत्संपूरये तस्य निर्हार उक्तः ।”

व्याख्या—एक धायत को वर्ग में परिणित करने हेतु धायत की चौड़ाई के बराबर एक वर्ग धायत में बना लीजिए शेष धायत को दो समान भागों में विभाजित कर लीजिए। इन समान भागों की चौड़ाई लेकर वर्ग के साथ एक अन्य धायत भी बना दीजिए। इस धायत को वर्ग के ऊपर वाले धायत तक बढ़ा दीजिए। पुनः वर्ग की भुजा में धायत की चौड़ाई जोड़कर गति उत्पन्न कीजिये। जहाँ वह धायत को काटेगी उससे वर्ग की भुजा प्राप्त हो जायगी।

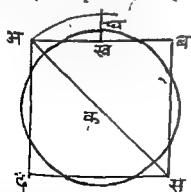
उदाहरण—चित्र को देखिए। अब स द एक धायत है। अब के समान अ द और ब स को क्रमशः म और न स्थानों पर काटा। म न को मिला दिया। शेष बचे हुए धायत म न स द को प फ द्वारा समद्विभाजित किया। वर्ग अ ब न म की म न भुजा के साथ धायत म न प फ को खड़ा किया जो कि न ब य र है। प फ तथा य र को बढ़ाया। ये दोनों एक दूसरी को क स्थान पर काटती हैं। भुजा म र में म को स्थिर रखकर गति उत्पन्न की जो कि प क को ख स्थान पर काटती है। प क हमारे इच्छित वर्ग की भुजा होगी।



वर्ग को समान क्षेत्रफल वाले वृत्त में परिणित करना—प्रदत्त वर्ग के समान क्षेत्र का वृत्त बनाने की विधि बताते हुए योद्धामन ने लिखा है—

चतुर्त्वं मण्डलं चिकीर्ष्यन्नङ्गण्यार्धं मध्यात्पाचीमभ्यापातये दत्तिशिष्यते तस्य सह दृतीयेन मण्डलं परिनिक्षेत् ।

व्याख्या—वर्ग को वृत्त में परिणित करने हेतु वर्ग के अन्तर्गत एक वर्ण खींचो । वर्ण के मध्य बिन्दु को केन्द्र मानकर किसी एक कोने से एक चाप खींचो । जिस मुखा की ओर चाप खींचा गया, उसके मध्य बिन्दु से एक अभिलम्ब खींचा, जो चाप को किसी स्थान पर काटे । इस दूरी के तृतीय भाग से वर्ग के केन्द्र तक का अर्ध-व्यास (Radius) लेकर वृत्त बनाइये । वह वर्ग के समान क्षेत्रफल वाला वृत्त होगा ।



उदाहरण—चित्र को देखिये । अब स द एक वर्ग है । अब वर्ण खींचा गया जिसका कि मध्य बिन्दु क है । क को केन्द्र मानकर क अ अर्धव्यास लेकर एक चाप खींचा । पुनः अ ब के केन्द्र बिन्दु ख पर लम्ब डाला जोकि चाप को ग स्थान पर काटता है । ख से ख ग का एक तिहाई भाग ख घ काटा । अब क को केन्द्र मानकर तथा क घ अर्ध-व्यास लेकर एक वृत्त खींचा जोकि क्षेत्रफल में वर्ग अब स द के तुल्य होगा ।

वृत्त को वर्ग में परिणत करना—वृत्त को वर्ग में परिणत करने की विधि बीदायन ने निम्न प्रकार से दी है—

मण्डलं चतुरस्रं चिकीर्षन्विष्टकंमण्डलो भागान्कृत्वा भागमेकोनत्रिंशत्वा विभाज्याष्टविंशति भागानुद्धरद्वाभागस्य च षष्ठमष्ट भागोनम् ।

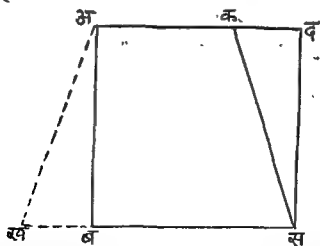
व्याख्या—वृत्त को वर्ग में परिणत करने हेतु व्यास को आठ बराबर भागों में विभक्त करो । पुनः उनमें से एक भाग को २९ (एकोनत्रिंश) समान भागों में विभक्त करो । इन उनतीस वंशेष षष्ठम भाग को षष्ठ भाग के षष्ठ भाग सहित घटाओ ।

वर्ग को विपमबाहु चतुर्भुज में परिणत करना—वर्ग को विपमबाहु चतुर्भुज में परिणत करने की विधि बताते हुए बीदायन ने कहा हैः—

चतुरमेकतोभ्रमिमाश्चिकीर्षन्मिमतः करणी त्रिपङ्क्त्यानी कृत्वा दोषमदणया विमज्ज्य विपर्यस्तं तत्रो भ्रमदणयात् ।

व्याख्या—एक वर्ग को समान क्षेत्रीय विपमबाहु चतुर्भुज में परिणत करने हेतु विपमबाहु की एक भुजा के समान भाग वर्ग की किसी भुजा में से काट लीजिये । पुनः उस स्थान से कर्ण खींचिये त्रिभुजाकार टुकड़े को विपरीत दिशा में जोड़ देने पर अभीष्ट विपमबाहु चतुर्भुज तैयार हो जायगा ।

उदाहरण—अ ब स द एक वर्ग है । अ द पर एक बिन्दु 'क' ले लिया 'म' 'ब' हमारे अभीष्ट विपमबाहु चतुर्भुज की क्षीर्ण भुजा है 'क' 'स' को मिला दिया । अम त्रिभुज 'क' 'स' 'द' को 'म' 'ब' पर इस प्रकार रखा कि बिन्दु 'स' 'म' पर पड़े व बिन्दु 'द' 'ब' पर पड़े व बिन्दु 'क' बाहर बिन्दु 'ल' पर पड़ेगा । 'म' 'ल' स 'क' अभीष्ट विपमबाहु है ।



इस प्रकार की अनेको रेखा गणितीय रचनाएँ एवं साध्य वैदिक साहित्य उपलब्ध हैं अतः स्पष्ट हो जाता है कि रेखागणित के क्षेत्र में भी भाषों में पर्याप्त ज्ञान धजित कर लिया था ।

बीज-गणित

॥ १ ॥

प्रक गणित व वेदागणित की भाँति बीजगणित के मूलभूत सिद्धान्तों का अमृदय वैदिक काल में ही हो गया था। गणित के मूलभूत सिद्धान्तों को सरल करने हेतु बीजगणित का प्रयोग प्रारम्भ हुआ। जैसा कि इस गणितीय शाखा के नाम से ही स्पष्ट है कि इसमें बीजों (पसरों) की सहायता से ही गणितीय समस्याओं का हल निकाला जाता है। विद्याल संख्याओं के स्थान पर एक बीज मान लिया जाता है। पुनः इसी बीज को इकाई मानकर गुणा भाग आदि किया जाता है। इसे प्राचीन गणितज्ञों ने “अव्यक्त गणित” संज्ञा भी प्रदान की थी। वास्तव में यह सही भी है, क्योंकि इसमें अव्यक्त चिह्नों (पसरों Alphabates), जिनका कि मूल्य ज्ञात नहीं होता, की सहायता से गणितीय समस्याओं का हल निकाला जाता है। इतिहासकारों के मतानुसार ब्रह्मगुप्त प्रथम भारतीय गणितज्ञ था, जिसने बीज-गणित का आविष्कार किया। ब्रह्मगुप्त ने अपने ग्रन्थ “ब्रह्म स्फुट सिद्धान्त” में बीजों को अंकों के स्थान पर प्रयुक्त करने का आदेश दिया है।^१ “जगद्गुरु भारत” नामक पुस्तक में किसी अभिद नामक भारतीय गणितज्ञ को बीज गणित का आविष्कारकर्ता माना है। लेकिन वास्तव में बीज गणित का प्रयोग भारत में वैदिक काल

१ - वर्गाक्षराणि वर्गप्रवर्गप्रवर्गाक्षराणि कातङ्घो यः ।

स द्विनयके स्वरा नव वर्गप्रवर्गे तवान्वयवर्गे वा ॥

उक्त श्लोक के अनुसार—क=१, ख=२, ग=३, घ=४, ङ=५, च=६,

झ=७, ज=८, झ=९, डा=१०, ड=११, ठ=१२, ड=१३, ढ=१४, ए=१५,

त=१६, थ=१७, द=१८, ध=१९, न=२०, प=२१, फ=२२, ब=२३, भ=२४,

म=२५ और य=२६, र=२७, ल=२८, व=२९, श=३०, ष=३१, स=३२,

ह=३३ (विस्तृत व्याख्या हेतु पं० सुधाकर द्विवेदी कृत “गणक तरङ्गिणी”

पृष्ठ ३-४ देखिये)

से ही होने लग गया था। वैदिक साहित्य में यद्यपि स्पष्ट रूप से तो अव्यक्त गणित अपवा बीज गणित का उल्लेख नहीं मिलता तथापि बीज गणित के मूल सिद्धांतों (Fundamental principles) का संकेत अवश्य मिलता है। बीज गणित का प्रयोग दार्शनिक विवेचन में भी होता था। अस्तिक मिश्रण की व्याख्या करते हुए कहा गया कि "अध्यारोप और अपवाद विधि से ब्रह्म के स्वरूप को अध्यारोप निष्प्रपञ्च ब्रह्म में जगत का आरोप कर देना है और अपवाद विधि से आरोपित वस्तु का पृथक्-पृथक् निराकरण कर देना होता है। इसी से उस स्वरूप को ज्ञात कर सकते हैं। तात्पर्य यह है कि प्रथमतः आत्मा के ऊपर शरीर का आरोप कर दिया जाता है। तत्पश्चात् आत्मा को अन्नमय, मनोमय, विज्ञानमय, ज्ञानमय और आनन्दमय इन पंच कोषों एवं स्थूल और सूक्ष्म कारण शरीरों में पृथक् कर उससे आत्मा का ज्ञान प्राप्त किया जा सकता है। उदाहरणार्थ—

$k^2 + 2k = 35$ यहाँ अज्ञात राशि का मूल्य निकालने के लिए दोनों ओर १ जोड़ दिया जाता है। इससे अज्ञात राशि का मूल्य निकल आता है—

$$k^2 + 2k + 1 = 35 + 1$$

$$(k + 1)^2 = 36$$

$$k + 1 = 6$$

$$k + 1 - 1 = 6 - 1$$

$$k = 5$$

इस उदाहरण में पहले जो एक जोड़ा गया था, अन्त में उसी को निकाल दिया। इसी प्रकार जिस शरीर का आत्मा के ऊपर आरोप किया गया था अपवाद द्वारा उसी को शरीर से पृथक् कर दिया जाता है। उसी प्रकार दर्शन के प्रकाश में बीज गणित के सारे सिद्धान्त आध्यात्मिक ज्ञान पढ़ते हैं।^१

आध्यात्मिक क्षेत्र के साथ-साथ ज्योतिष की सूक्ष्म समस्याओं का हल बीज गणित द्वारा ही निकाला जाता है। वैदिक काल में बीज गणित का स्वरूप रेखा गणितीय ही था। जैसा कि डा० विभूतिभूषण दत्त ने भी कहा है कि "हिन्दू बीज-गणित का उद्भव शुल्ब साहित्य (८००-५०० ई० पू० व ब्राह्मण साहित्य (१२०० ई० पू० तक पीछे ले जाया जा सकता है। लेकिन उस समय अधिकांशतः इसका स्वरूप रेखागणितीय ही था। (The origin of Hindoo Algebra can be traced back to the period of the sulba (800-500 B.C.) and Brahmana [1200 B.C.]. But it was then mostly Geometrical)"^२

१-भारतीय ज्योतिष—ले० नेमीचन्द्र जैत० पृष्ठ ३५-३६।

२-The Science of Sulbā-by Dr. Datta.

अब हम कुछ बीज गणितीय [Algebraical] समीकरणों [Equations] पर विचार करेंगे। डा० दत्त^१ ने महावेदी [Great Altar] का समीकरण प्रस्तुत करते हुए कहा है—

It has been described to be of the form of an isoscale trapezium whose face is 24 units long, base 30 and attitude 36. If x be the enlarged units of measure taken in increasing the size of the altar by m units of area, we must have—

$$36 \times \frac{(24x + 30x)}{2} = 36 \times \frac{(24 + 30)}{2} + m$$

$$\text{or } 072 x^2 = 972 + m$$

$$x = \sqrt{1 + \frac{10}{972}}$$

If m is to be put equal to $972(n-1)$, so that the area of the enlarged altar is n times, its original area we get

$$x = \sqrt{n}$$

इसमें बताया गया है कि एक समाद्विबाहु समलम्ब जिसके कि शीर्ष की लम्बाई २४ इकाई है, आधार ३० इकाई व लम्ब ३६ इकाई है। यदि आकार को बढ़ाने हेतु 'क' इकाई की वृद्धि की जाय तो वेदी का क्षेत्र जो 'म' इकाई क्षेत्र का है, निम्न होगा—

$$३६ क \times \frac{(२४क + ३०क)}{२} = ३६ \frac{(२४ + ३०)}{२} + म$$

$$\text{या } ६७२क^२ = ६७२ + म$$

$$क = \sqrt{\frac{१ + म}{६७२}}$$

यदि 'म' का मान $६७२(n-1)$ रख दिया जाय कि अभिवृद्ध वेदी 'न' गुणा हो तो उसका मूल क्षेत्रफल निम्न होगा—

$$क = \sqrt{n}$$

इस सिद्धान्त का निरूपण शतपथ ब्राह्मण में भी हुआ है।^२ वहाँ न का मूल्य १४ देकर क का मूल्य ज्ञात किया गया है। यथा—

$$क = \sqrt{१४}$$

$$क = ३.७४.....$$

१ - History of Hindoo Mathematics, Vol. II PP 6-7.

२ - शत० ब्रा०, १०।२-३।७।

डा० दत्त ने अपनी पुस्तक "सुल्बा"^१ में एक वर्ण द्विघात समीकरण (quadratic equation) प्रस्तुत किया है। वे यह $k^2 + बक = स$ समीकरण हल करते हुए $k^2 = -१ + \frac{स}{क}$ सिद्ध करते हैं।

बोढायन ने भी इसी प्रकार एक वर्ण द्विघात समीकरण (quadratic equation) समकोण त्रिभुज (Right angle triangle) के आधार पर प्रस्तुत किया है। वह निम्न प्रकार से है—

$$क^2 + ख^2 = ग^2 \quad (\text{ग त्रिभुज का कर्ण है।})$$

इस समीकरण द्वारा दो भुजाओं के ज्ञात होने पर तीसरी भुजा ज्ञात की जा सकती है। यदि भुजा क तथा ख क्रमशः ३ तथा ४ इकाई हो तो—

$$(३)^2 + (४)^2 = ग^2$$

$$९ + १६ = ग^2$$

$$२५ = ग^2$$

$$(५)^2 = ग^2$$

$$५ = ग$$

अर्थात् तीसरी भुजा (कर्ण) की सम्बाई ५ इकाई होगी। किसी एक भुजा के ज्ञात होने पर तीनों भुजाएं ज्ञात करने का सूत्र शुक्ल सूत्रों में प्राप्त होता है।^२

यदि $क^2 + ख^2 = ग^2$ हो तो तीनों भुजाओं का नाप निम्न प्रकार होगा—

$$ग; \frac{३}{४} ग, \frac{५}{४} ग$$

$$व ग; \frac{५}{१२} ग, \frac{१३}{१२} ग$$

उक्त सूत्रों की सहायता से एक भुजा ज्ञात होने पर तीनों भुजाएं ज्ञात की जा सकती हैं। वेद संहिताओं में हमें बीजगणितीय चिन्त प्रश्न भी प्राप्त होते हैं। चिन्त प्रश्नों को गणितीय क्रम (Mathematical Progressions) भी कहा जाता है। प्राधुनिक बीजगणित में तीन प्रकार के गणितीय क्रम प्रचलित हैं। अंकगणितीय क्रम (Arithmetical Progressions); रेखागणितीय क्रम (Geometrical Progressions) अथवा गुणोत्तर श्रेणी क्रम व व्युत्क्रम श्रेणी (Harmonic Progressions)। इनमें से अंक-गणितीय व गुणोत्तर श्रेणी क्रम हमें वेदों में प्राप्त होता है।

१—Dr Dutta's "Sulba" PP. 167.

२—वही, पृ० १८०।

अंक गणितीय क्रम—अंकों की वह श्रेणी (Series) जिसमें प्रत्येक पड़ोसी अंकों में सामान्य अन्तर (Common Difference) बना रहता है, उसे अंकगणितीय क्रम कहा जाता है यथा—

(क) १, २, ३, ४, ५, ६,
 (ख) १, ३, ५, ७, ९, ११,

उक्त प्रथम श्रेणी में प्रत्येक उत्तर एवं पूर्व अंक के मध्य सामान्य अन्तर १ बना हुआ है। अतः यह श्रेणी अंक गणितीय क्रम में है। इसी प्रकार दूसरी श्रेणी में सामान्य अन्तर २ है। इन्हें सामान्यान्तर अंक श्रेणी भी कहा जा सकता है, क्योंकि पूरी श्रेणी में प्रत्येक पड़ोसी अंकों के जोड़े के मध्य सामान्य अन्तर बना रहता है। इस प्रकार की सामान्यान्तर अंक श्रेणियाँ वेदों में काफी उपलब्ध होती हैं। भयव्यवेद में एक ऐसी श्रेणी आई है जो उक्त उदाहरण की पहली श्रेणी से मिलती है। वह है—

न द्वितीयो न तृतीयश्चुर्ध्वो नाप्युच्यते,

न पंचमो न षष्ठः सप्तमो नाप्युच्यते

नाष्टमो न नवमो दशमो नाप्युच्यते

य एतं देवमैकत वेद १।

अर्थात् परमेश्वर दूसरा नहीं है, न तीसरा है और न चौथा ही कहा जा सकता है। पाँचवाँ नहीं है और छठा नहीं, और न सातवाँ ही कहा जाता है। आठवाँ नहीं है नवाँ नहीं है न दसवाँ ही कहा जाता है। जो इस देव की एकत्व से युक्त जानता है। (वही मत्स्य जानता है।)

उक्त मन्त्र में जो श्रेणी बनती है वह निम्न प्रकार से है—

२, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, १०

उक्त श्रेणी में सामान्य अन्तर (Common difference) १ है। इसी प्रकार यजुर्वेद में निम्न सामान्यान्तर श्रेणी प्रस्तुत की गई है—

१, ३, ५, ७, ९, ११, १३, १५, १७, १९, २१, २३, २५, २७, २९, ३१, ३३.

इस अंक श्रेणी में सामान्य अन्तर २ है। इसी प्रकार की एक और श्रेणी देखिए—

४, ८, १२, १६, २०, २४, २८, ३२, ३६, ४०, ४४, ४८.

इन अंक श्रेणियों का उपयोग वेदी निर्माण हेतु ली जाने वाली ईंटों की कुल संख्या ज्ञात करने हेतु किया जाता था। हवन-कुण्ड नीचे से सजा होता है

१—अपर्व सं०, १३। ४। १६।

२—यजु० सं०, १८। २४।

३—यजु० सं०, १८। २५।

व ज्यों-ज्यों ऊपर उठता है त्यों-त्यों उत्तरोत्तर चौड़ा होता रहता है। इसी प्रकार उक्त यजुर्वेद की श्रंख श्रेणियाँ निम्नतम श्रंख से उत्तरोत्तर अधिक होती चलती हैं। इन श्रंख श्रेणियों के योग से ही आर्य जान पाते थे कि “अमुक वेदी हेतु इतनी ईंटें चाहिए और आहुतियों की इमला निर्धारित करने में भी गणित का प्रयोग होता था।” इन श्रेणियों के योग की विधि वैदिक साहित्य में उपलब्ध नहीं, लेकिन उत्तर-कालीन गणितज्ञ अपने ग्रन्थों में प्रायः लिखते हैं कि यह ग्रन्थ परम्परागत सूत्रों के आधार पर लिख रहा है। इससे यह संकेत मिलता है कि परवर्ती गणितज्ञों द्वारा प्रयुक्त सूत्र वैदिक काल में भी प्रचलित रहे हों। आर्यभट्ट^३ ने सामान्यान्तर श्रंख श्रेणी के योग का निम्न सूत्र दिया है—

इष्ट श्रेकं दत्तितं सपूर्वमुत्तरगुणं सम्मुख मध्यम् ।

इष्ट गुणितमिष्टधनं त्वयवाद्यन्त पदार्धहस्तम् ॥

“इसमें इष्ट से पद (गच्छ) और इष्ट धन से सर्व धन ग्रहण लिया गया है।

पूर्व से पहली संख्या है जिसे आदि मुख भी कहते हैं।”

उक्त सूत्र के अनुसार—

आदि = आ ; उत्तर = च = च और पद = गच्छ = ई है। ती उसका

मध्य धन

$$= च \frac{(६-१)}{२} + आ = च \frac{(६-१)+२आ}{२}$$

और इष्ट धन—

$$= ६ \left(\frac{[च (६-१) + २आ]}{२} \right) \text{ होगा}$$

उक्त सूत्र में यदि आ = १ और च = १ और ई = ५ हो तो निम्न श्रेणी बन जायेगी—

$$१ + २ + ३ + ४ + \dots + ५ = \frac{५(५+१)}{२}$$

इस सूत्र के अनुसार यजुर्वेद की सामान्यान्तर श्रंख श्रेणियों का योग निम्न होगा—

$$(i) १ + ३ + ५ + ७ + ९ + ११ + १३ + १५ + १७ + १९ + २१ + २३ + २५ + २७ + २९ + ३१ + ३३, \dots$$

१ — वैदिक सम्पत्ति — पं० रघुनन्दन शास्त्री।

२ — आर्यभट्टीयम्, गणितपाद, श्लोकान्तर २२।

३ — पाटी गणित का इतिहास — यं० सुपाकर द्विवेदी, पृ० ११५।

उक्त श्रेणी में सूत्र के अनुसार—

मा = १ (प्रारम्भ की संख्या)

च = २ (सामान्यान्तर)

ई = १७ कुल पदों की संख्या

अतः सूत्र के अनुसार—

$$= 17 \times \frac{2(17-1)+2 \times 1}{2}$$

$$= 17 \times \frac{2(16)+2}{2}$$

$$= 17 \times \frac{32+2}{2}$$

$$= 17 \times \frac{34}{2}$$

$$= 17 \times 17 = 289 \text{ इष्ट धन ।}$$

(ii) ४ + ८ + १२ + १६ + २० + २४ + २८ + ३२ + ३६ + ४० + ४४ + ४८

उक्त श्रेणी में सूत्र के अनुसार—

मा = ४

च = ४

ई = १२

अतः सूत्र के अनुसार—

$$= 12 \times \frac{4(12-1)+2 \times 4}{2}$$

$$= 12 \times \frac{44+8}{2}$$

$$= 12 \times \frac{52}{2}$$

$$= 12 \times 26 = 312 \text{ इष्ट धन}$$

गुणोत्तर श्रृंखला क्रम (Geometrical Progressions) :—श्रृंखला गणितीय क्रम (Arithmetical progressions) अथवा सामान्यान्तर श्रृंखला के समान ही भाँति वेदों में गुणोत्तर श्रृंखला क्रम श्रेणी भी प्राप्त होती है । “श्रृंखला अथवा श्रृंखला की वह श्रेणी जिसमें प्रत्येक पदोत्ती अर्को का सापेक्ष अनुपात पूरी श्रेणी में एक

सा रहता है वह थेली गुणोत्तर अंक क्रम अथवा रेखागणितोत्तर क्रम में कहलाती है।^१ उदाहरणार्थ :-

(i) १, २, ४, ८, १६.....

(ii) १, ३, ९, २७, ८१.....

उक्त थेलियों में से प्रथम थेली की संख्याएँ उत्तरोत्तर द्विगुणित होती चली गई हैं अर्थात् समूची थेली में १:२ का अनुपात प्रत्येक पड़ोसी अंकों के जोड़े में विद्यमान है। इसी प्रकार दूसरी थेली में की 'संख्याएँ' उत्तरोत्तर त्रिगुणित होती चली गई हैं। अर्थात् इसमें प्रत्येक दो पड़ोसी अंकों में १:३ का अनुपात विद्यमान है। इस प्रकार की गुणोत्तर अंक क्रम थेली यजुर्वेद में 'उपलब्ध' होती है। वह निम्न प्रकार से है^२—

१, १०, १००, १०००, १००००, १०००००, १००००००.....परार्ध ।

उक्त अंक थेली की संख्याएँ उत्तरोत्तर दस गुणित होती गई हैं। अर्थात् इसमें प्रत्येक दो पड़ोसी संख्याओं में १:१० का अनुपात विद्यमान है। इस प्रकार की अंक थेलियों के योग की विधि भास्कराचार्य ने निम्न प्रकार से बताया है^३—

विधमे गच्छे ध्येके गुणकः स्थाप्य समेन्द्रिते वर्गः ।

गच्छत्तवान्तमग्या द्वयस्तं गुणवर्गजफलं यत्तत् ॥१॥

ध्येकं ध्येकगुणोद्धूतमापिगुणं स्थाद्गुणोत्तरे गणितम् ।

जहाँ गच्छ^४ विपम हो वहाँ गच्छ में से एक घटाकर गुण का स्थापन करना और जहाँ गच्छ सम हो वहाँ आधा स्थापित करना चाहिए। इसी प्रकार जहाँ तक गच्छ शून्य हो वहाँ तक यह क्रिया की जाय। इस प्रकार गुण एवं वर्ग की पक्ति बन जायगी। फिर पूर्व का जो गुण है, उसका उसके ऊपर जो वर्ग है वहाँ वर्ग कर स्थापन करना। फिर उस वर्ग फल के अगले गुण हो तो उससे वर्ग फल का गुणन करना अथवा वर्ग हो तो वर्ग करके स्थापित करना। इसी प्रकार कर सबके ऊपर जो अंक राशि हो, उसमें से एक को घटा कर जो अवशेष रहे उसको एक से हीन जो गुण हो उसका भाग देना और जो सन्धि हो उसका आदि घन से गुणन कर जो फल मिलेगा वही गुणोत्तर अर्थात् द्विगुणोत्तर का फल है।

१ — 'वेदों में गणितोत्तर क्रम'—ले० मांगोलाल व्यास 'अयंक', साप्ताहिक भाष्य,

१४ सितम्बर-१९५८ में प्रकाशित ।

२ — यजुर्वेद, १७.१.२ ।

३ — सीतावती, पृ० १२२ ।

४ — पर्वों की कुल संख्या को गच्छ कहते हैं। गच्छ = (ई)

इस विधि से जो यजुर्वेद की दशगुणोत्तर अंक क्रम धोणी को प्रथम सात संख्याओं का योग निम्न होगा । इस धोणी में—

$$\text{आदि} = १$$

$$\text{उत्तर दशगुण} = १०$$

$$\text{गच्छ} = ७$$

इसमें गच्छ विधम है अतः इसमें से १ घटाकर ६ गुण स्थापन किया । ६ सम है अतः इसका आधा ३ हुआ । इसका वर्ग स्थापित किया । ३ विधम है अतः इसमें से १ घटाया तब २ हुए । इसका गुण स्थापित किया । २ सम है अतः इसका आधा १ है, इसका वर्ग स्थापित किया । पुन १ में से १ घटाया तब हुआ ० इसका गुण स्थापित किया ।

६ गुण	गुण १०००००
३ वर्ग	वर्ग १००००
२ गुण	गुण १०००
१ वर्ग	वर्ग १००
० गुण	गुण १०

सबसे नीचे गुण के सम्मुख १० गुण स्थापित किया फिर ऊपर वर्ग के सम्मुख १० का वर्ग १०० रखा । फिर उसके ऊपर गुण है अतः १०० का गुण १० गुण अर्थात् १००० रखा पुन ऊपर वर्ग है अतः १००० का वर्ग १०,००,००० रखा, ऊपर गुण है अतः १०,००,००० का १० गुण १,००,००,००० रखा । इस गुणन फल में से १ घटाया तो १,००,००,०००-१ = ९९,९९,९९९ हुए । इसमें एक से हीन गुण = चय (१०-१) = ९ का भाग दिया तब लब्धि ११११११ हुई । इसे आदि घन १ से गुण किया तो गुणनफल ११११११ ही हुआ, यही संकलित द्रष्ट घन है ।

इस प्रकार बीजगणित के सिद्धान्तों के अनेको सकेत वैदिक साहित्य में उपलब्ध होते हैं । अतः प्रमाणित होता है कि बीज-गणित के क्षेत्र में भी आर्यों ने अग्रेजी ज्ञान प्राप्त कर लिया था ।

लेखन कला

पूर्व अध्यायों में गणित विद्या की तीन प्रमुख शाखाओं अंक गणित, रेखा गणित व बीज गणित — पर प्रकाश डाला गया है ।^१ इससे स्पष्ट हो जाता है कि वैदिक काल में गणित विद्या का काफी विकास हो गया था । प्रस्तुत अध्याय में लेखन कला (Art of Writing) पर विचार किया जायेगा । वैदिक-काल के सम्बन्ध में प्रचलित विभिन्न भ्रान्तियों में से एक यह भी है कि भार्य लिखना नहीं जानते थे । लेकिन गणित और लेखन का अभिन्न सम्बन्ध है । बिना लेखन के गणितीय प्रश्नों का विस्तार सम्भव नहीं । कतिपय विद्वानों का यह विचार है कि वेद आध्यात्मिक ग्रन्थ हैं, अतः उन्हें लिखने की आवश्यकता ही नहीं थी । वेदों को धुसि कहा गया है, अतः वेद व वैदिक साहित्य सुन कर ही कण्ठस्थ कर लिया जाता था ।

इसी धारणा के अनुसर विद्वानों ने यह भी कह दिया है कि भारतीय लिपियों का विकास सिमेटिक लिपि था । इस प्रकार लेखन-कला के क्षेत्र में भी जगद्गुरु भारत को विदेशियों का श्रेष्ठ घोषित कर दिया गया । इन मस्त भ्रान्त धारणाओं का प्रतिपादन यूरोपीय लेखकों द्वारा हुआ । उन्हीं का अनुकरण कर कुछ भारतीय लेखकों ने भी यह स्वीकार कर लिया । वर्तमान में पढ़ाई जाने वाली अधिकांश भारतीय इतिहास की, पाठ्य-पुस्तकों में इसी बात को दोहराया गया है कि भार्य लिखना नहीं जानते थे । इसके साथ यह भी कहा गया है कि भारतीय लिपियों सिमेटिक लिपियों से व्युत्पन्न हुई हैं ।

लिपि शास्त्र विशेषज्ञों में से पहला दल उनका है जो भारतीय लिपि को फिनेशियन लिपि से व्युत्पन्न मानते हैं ।^१

१—डॉ० बर्नेल ने अपने ग्रन्थ South Indian Paliography के पृ० ५० पर लिखा है कि 'भारतीयों ने फिनेशियन लोगों से लिखना सीखा और फिनेशियन प्रक्षर, जिनसे कि दक्षिणी तथा अशोक लिपि [ब्राह्मी] व्युत्पन्न हुई, भारत में ५०० ई०पू० से पहले नहीं आए थे और न वे ४०० ई०पू० के बाद आए ।'

इस गुट के अन्तर्गत विलियम जोन्स, कार्लेसियस, डे के, टेलर, ब्युचर, बर्नेल आदि विद्वान् सम्मिलित हैं। इस मत के अनुयायियों के भी दो दल हैं। प्रथम दल है ब्यूलर व उनके अनुयायियों का। ब्यूलर आदि की मान्यता है कि भारतीय लिपि की उत्पत्ति उत्तरी सिमेटिक लिपि [फिनेशियन लिपि] से हुई। द्वितीय दल टेलर व उनके अनुयायियों का है, जोकि भारतीय लिपि को दक्षिण फिनेशियन लिपि से व्युत्पन्न मानता है। इन दोनों दलों का आपसी मत भेद भी इतना तीव्र है कि इनसे किसी एक निष्कर्ष पर नहीं पहुँचा जा सकता। १। क्योंकि दोनों मतों के मतानुयायियों ने अपने अपने मतों की पुष्टि में जो प्रमाण दिए हैं, वे ठोस नहीं हैं। मात्र कल्पना व अटकल-पकड़ विधियों से ही उन्होंने अपने मतों को प्रस्तुत किया है। इन दोनों मतों के अनुयायियों द्वारा अपनाई गई शोध-पद्धति भी वैज्ञानिक नहीं है। इन्होंने जिस शोध पद्धति को अपनाया है, उससे तो किसी भी लिपि को किसी भी लिपि से व्युत्पन्न प्रामाण्य प्राप्त किया जा सकता है। मेरा विषय उनकी शोध पद्धति की विवेचना करना नहीं।

टेलर और ब्यूलर के मतों की आलोचना के लिए हमें कहीं दूर से प्रमाण लाने की आवश्यकता नहीं। उनके सिद्धान्त की निस्सारता तो सिन्धु सम्पत्ता की खुदाई से प्राप्त मुद्राएँ प्रकट कर देती हैं। सिन्धु सम्पत्ता से प्राप्त मुद्राओं पर लेख उतकीर्ण हैं। यदि भारतीय लिपि फिनेशियन लिपि से ही व्युत्पन्न है, तो निःसन्देह सिन्धु लिपि भी फिनेशियन लिपि से ही व्युत्पन्न हुई और यदि ऐसा है तो क्यों नहीं फिनेशियन प्रक्षरों की सहायता से सिन्धु लिपि को पढ़ लिया जाता। लेकिन ऐसा करने में वे असमर्थ रहे। इससे उनके सिद्धान्त की निस्सारता प्रकट हो जाती है।

वर्तमान में प्राप्य प्राचीनतम भारतीय लिपियों में ब्राह्मी और खरोष्ठी हैं। इन लिपियों के उद्भव पर विद्वानों ने भिन्न-भिन्न मत प्रस्तुत किए हैं। ब्राह्मी लिपि के सम्बन्ध में कृतिपय विचारकों का मत है कि यह लिपि ब्रह्मा के मुख से उत्पन्न हुई, अतः ब्राह्मी कहनाई।^१ यह बात समझ में आने वाली कदापि नहीं। अथवा तो यह भी ज्ञात नहीं कि यह ब्रह्मा कौन था? जो मुँह से कभी ब्राह्मण उगलता था, तो कभी लिपियाँ। यदि यह मान भी लिया जाय कि ब्रह्मा कोई एक व्यक्ति था तो मसूमा यह आती है कि लिपि का मुँह से क्या सम्बन्ध? हाँ आपा का मुँह से अवश्य सम्बन्ध है। लिपि का सम्बन्ध हाथ से है।

१ - हेनसांग ने भी अपने यात्रा विवरण में कहा है कि "भारतवासियों की परंपरा-माला के प्रसार ब्रह्मा ने बनाए थे और उनके रूपान्तर पहले से अब तक चले आ रहे हैं।" सेमरल बोस कृत "बुद्धिष्ट रेकर्ड ऑफ़ दी वेस्टर्न वर्ल्ड" पृ० ७७।

कुछ विद्वान् यह भी मानते हैं कि मानव खोपड़ी की हड्डियों के जोड़ के आकार से इसकी व्युत्पत्ति हुई । चूंकि खोपड़ी ब्रह्म-कपाली कहलाती है, अतः लिपि भी ब्राह्मी कहलाती है ।^१ यह सिद्धान्त भी कोरी कल्पना पर आधारित है । ब्रह्म कपाली के जोड़े की समस्त शक्तियों से ब्राह्मी अक्षरों का आकार नहीं मिलता और यदि ऐसा होता भी तो इसका नाम ब्राह्मी न होकर ब्रह्म कपालिक लिपि होता । लेकिन वास्तव में ऐसा नहीं है ।

ब्रह्म शब्द के अनेकों अर्थ हमें वैदिक साहित्य में मिलते हैं । ब्रह्म शब्द के नैरुक्तिक अर्थ में हमें ज्ञान की आवश्यकता नहीं । सामान्यतया ब्रह्म-विद्या का तात्पर्य आध्यात्मिक विद्या से लिया जाता है । अतः ब्रह्म विद्या से सम्बन्धित अपने अनुभवों को जिस लिपि में वैदिक कालीन ब्राह्मणों ने लिपि-बद्ध किया उसी लिपि को ब्राह्मी लिपि कहा गया । कालान्तर में यह सर्वमान्य हो गई । अतः अन्य सामग्री भी इसी लिपि में लिखी जाने लगी ।

खरोष्ठी लिपि के सम्बन्ध में भी ब्राह्मी की भांति कुछ मतभेद पाए जाते हैं । कतिपय विद्वानों ने इस शब्द की सन्धि-विच्छेद करते हुए कहा है कि लिपि 'खर + ओष्ठी' लिपि है । इससे इसका अर्थ हुआ गंधे के होठों वाली लिपि । विद्वानों की यह मान्यता है कि यह यवन लिपि है । तत्कालीन विद्वानों ने इसकी निम्ना स्वरूप यह नाम रख दिया । लेकिन यह मत उचित नहीं । अशोक के पश्चिमोत्तर प्रदेश में प्राप्त होने वाले अभिलेखों में यह लिपि प्राप्त होती है, लेकिन अशोक ने कहीं भी इसका उल्लेख नहीं किया कि मैं यवन-लिपि में लेख लिखवा रहा हूँ । इसके अलावा यवन अर्थात् यूनानी लिपि से यह खरोष्ठी लिपि किंचित भी मेल नहीं खाती । सबसे बड़ा अन्तर तो यह है कि यूनानी लिपि बाएँ से दाएँ लिखी जाती है, जबकि खरोष्ठी दाएँ से बाएँ अर्थात् उर्दू, फारसी, अरबी की तरह लिखी जाती है । वस्तुतः यह लिपि तक्षशिला व उसके आसपास के प्रदेशों में प्रचलित थी । उसके पड़ोस में ही पश्चिम लिपि प्रचलित थी अतः उन्हीं पड़ोसी लिपियों से ही यह लिपि प्रभावित हुई । बाएँ से दाएँ लिखी जाने लगी । तक्षशिला जो उस समय शिक्षा का महान् केन्द्र था उसमें विद्यार्थियों के हितार्थ कुछ ग्रन्थों की प्रतिलिपियाँ कराई गईं । इसके लिए तत्कालीन पद्धति के अनुसार भोज-पत्रों अथवा ताडपत्रों पर अक्षर खरोच कर खोद दिए जाते व फिर उस पर खड़िया आदि का लेप कर दिया जाता । खुदे हुए भागों में खड़िया बैठ जाती थी । इस प्रकार एक स्थाई लेप तैयार हो जाता था । इस प्रकार खरोचने की क्रिया के कारण सम्भवतः इसे खरोष्ठी अथवा खोष्ठी लिपि कहा गया । मसि का लेप किया जाता है, अतः "लिप् लिप्यते" धातु से लिपि शब्द बना ।

इससे स्पष्ट हो गया कि ब्राह्मी का नामकरण विषय के आधार पर हुआ । खरोष्ठी का नामकरण क्रिया के आधार पर हुआ । इससे यह भी स्पष्ट हो जाता है कि दोनों लिपियाँ भारतीय ही हैं । हां सीमान्तर प्रदेश में प्रचलित होने के कारण इस लिपि पर विदेशी प्रभाव अवश्य रहा । इन लिपियों में लिखे हुए लेख हमें प्रशोक के काल से ही पर्याप्त मात्रा में मिलने प्रारम्भ होने हैं । अतः इस लेखन कला की वैदिक परम्परा का साहित्यिक मन्दर्भों द्वारा अध्ययन करेंगे ।

प्रो० मैक्समूलर ने भारतीय लिपि के सम्बन्ध में कहा है कि पाणिनी की परिभाषा में एक भी ऐसा शब्द नहीं जिससे कि लिपि शब्द बने ।^१ लेकिन यह कथन उचित नहीं । पाणिनी की अष्टाध्यायी में लिपि शब्द का उल्लेख निम्न प्रकार से हुआ है^२—

दिवा विमानिशाम्रमा भाष्कारान्तानन्तादि बहुना द्वी कि लिपि लिखितं भक्ति कर्तृचित्रक्षेत्रास्यामङ्घ्रा वा ह्यसद्वतुरस्यः शु ।

वेदों में भी से न-कला का उल्लेख मिलता है । वेदों में अंक शब्द का प्रयोग कई स्थानों पर हुआ है । यजुर्वेद^३ में अंक शब्द का प्रयोग निम्न प्रकार से हुआ है—

उत स्मास्य प्रधतस्तुरण्यतः पर्यं न वेरनु वाति प्रगधिः ।

एतेनस्येव ध्रजतोऽङ्कसं परि बधि काष्णः सहोर्जा तमितः स्वाहा ॥

इसी प्रकार कई अन्य स्थानों पर भी इसका प्रयोग हुआ है । "अंक शब्द" "अंक चिह्न" वातु से व्युत्पन्न हुआ है । अतः अंक का अर्थ है—चिह्न करना । इससे स्पष्ट हो जाता है कि प्राचीन को चिह्न बनाने का ज्ञान अवश्य था इसी प्रकार गणक शब्द का भी प्रयोग यजुर्वेद में हुआ है ।^४

नमस्यै पुंश्चैलुं हसाय कारि यादसे शाबत्यां प्रामथ्यं गणकमभिक्रोशकं,
तामहसे धीणावाव पाणिष्ण तूणवध्वं तान्नुत्तायानन्वाय तलवम् ॥

गणक शब्द का प्रयोग लेखा जोखा रखने वाले के अर्थ में हुआ है । इस प्रसंग में तैत्तरीय संहिता^५, 'मैत्रायणी संहिता'^६ व 'काठक संहिता'^७ भी दृष्टव्य है । कुछ विद्वानों ने ऋग्वेद के मंत्र^८—

१ — प्रो० मैक्समूलर कृत 'History of Ancient Indian Literature, PP. 260.

२ — अष्टाध्यायी, ३ । २ । ११ ।

३ — यजु० सं०, ६ । १५ ।

४ — यजु० सं०, १० । २० ।

५ — तै० सं०, ४ । ४० ; ११ । ४ व ७ । २ ; २० । १ ।

६ — मै० सं०, २ । ८ । ११ ।

७ — का० सं०, ३६ । ६ ।

८ — ऋ० सं०, १० । ६२ । ७ ।

पुजानिः सृजन्त वाद्यतो व्रजं गोमन्तमश्विनं ।

२ में ददतो अष्टकर्णं अथो देवेव्यक्त ॥

यह पद 'सहस्र' में ददतो अष्टकर्णः' पद की व्याख्या करते हुए कहा है कि "मुझे एक हजार ऐसी गायें दो जिनके कानों पर आठ लिखा हो" लेकिन यह भाष्य उचित नहीं । इस सूक्त का अध्ययन करने में जान होता है कि यहाँ गाय नहीं वरन् वाणी का वर्णन किया गया है । अतः यहाँ गौ का अर्थ वाणी ही उचित ठहरता है । इसके प्रत्यावा 'अष्ट कर्णो' में 'अष्ट' शब्द कर्णों का संख्या वाची विशेषण ही उचित ठहरता है ।

वेदों में और भी ऐसे कई मन्त्र हैं, जिनसे कि लेखन कला सिद्ध होती है । ऋग्वेद में एक जुवारी का वर्णन आता है, उसमें वह जुवारी कहता है, एक बार बाजी लगाकर मैंने अपनी पतिव्रता परिनि को खो दिया । इस मन्त्र से यह स्पष्ट हो जाता है कि आर्य उस समय कोई ऐसा खेल खेलते थे, जिसमें कि किसी घनाकार पाश का प्रयोग होता हो और उसकी दिशाओं पर १, २, ३, ४, ५ व ६ के धिक्क बनाए जाते होंगे । राय व बोधालिंग ने भी अपने कोप में यही कहा है ।

इस प्रतिरिक्त लेखन कला की पुष्टि में एक अन्य युक्ति भी दी जा सकती है आर्यों का ज्योतिष व गणित सम्बन्धी ज्ञान अत्याधिक विकसित हो चुका था । गणित सम्बन्धी चर्चा तो पूर्व अध्यायों में हुई ही है । शपथ ब्राह्मण में एक अत्यन्त विशाल हिसाब का उल्लेख हुआ है, वह निम्न प्रकार से है —^२

॥ संक्षत प्रजापतिः ॥

अयं वाच विद्याया सर्वाणि सूतानिहन्त त्रयामेव विद्यामात्मानमभिसंस्कर वा इतिः ॥
स ऋचो व्यीहत् ।

द्वादश बृहती सहस्राण्येतावत्यो इउर्चा याः प्रजापतिसृष्टास्तास्त्रिंशद्वे भूहे पडिष्व तिष्ठन्त तास्त्रिंशद्वे भूहे तिष्ठन्त तस्मा शम्मासस्य रात्रयोष यत्पडिषु तस्मात् पाङ्क्त प्रजापतिस्ता अष्टाशत शतानि पङ्क्त्यो भवन् ॥

अथेतरो वेदो व्यीहत् ।

द्वादशी बृहतीसहस्राण्यष्टौ यजुषां चत्वारि सामान्यता व एतयो वेदयार्थप्रजापतिसृष्ट तो त्रिशत्तमे भूहे पङ्क्त्यतिष्ठे तां तो यजिशस्त्रे भूहे तिष्ठे तां तस्मात्रिशम्मासस्य रात्र्यां य यत्पडिषु तस्मात्पाङ्क् प्रजापतिस्ता अष्टाशतमेव शतानि पङ्क्त्यो भवन् ॥
ते सर्वे त्रयो वेदा ।

वश च सहस्राण्यष्टौ च शतान्यगीतीनामवन्तामुन्हर्तेन-
मुन्हर्तेनाशीतीमाप्नोन्मुन्हर्तेनाशीतो समपद्यत ॥

१ - ऋ० सं०, १०।३४

२ - शत० ब्रा० १०।३४

इन मन्त्रों का भाव यह है कि “ऋग्वेद के अधारों से प्रजापति ने १२०० वृहती (वृहती छन्द में कुल ३६ वर्ण होते हैं) छन्द बनाए (इस प्रकार ऋग्वेद के कुल अधार $१२०० \times ३६ = ४,३२,०००$ हुए) इसी प्रकार सामवेद व यजुर्वेद के भी क्रमशः ४००० व ८००० वृहती छन्द बनाए (इस प्रकार सामवेद व यजुर्वेद के अधारों की सम्मिलित संख्या ४,३२,००० हुई) इन्हीं अधारों से पंक्ति छन्द (जिसमें कि ८,८ वर्णों के ५ पद अर्थात् कुल ४० अधार होते हैं) बनाने से ऋग्वेद के (४,३२,००० $\div ४०$) १०८०० छन्द बनेंगे व उतने ही सामवेद व यजुर्वेद के मिलकर बनेंगे । एक वर्ष में ३६० दिन व एक दिन में ३० मूर्त होते हैं मतः वर्ष भर में १०,८०० मूर्त हुए । इसी प्रकार तीनों वेदों से बनने वाले पंक्ति छन्दों की संख्या वर्ष भर में मूर्तों की द्विगुणित होती है ।

उक्त मन्त्रों में बिना जटिल हिसाब लगाया गया है । ऐसा जटिल हिसाब बिना लिखित प्रयास किये नहीं हो सकता है । इस प्रकार के मन्त्रों जटिल हिमाव वेदों व वैदिक साहित्य में आए हैं । इससे स्पष्ट हो जाता है कि आर्यों को निश्चित रूप से लेखन कला का ज्ञान था ।

अब तक हमने कतिपय ऐसी युक्तियों का सहारा लिया जिनसे कि वैदिक काल में लेखन कला का प्रचलित होना सिद्ध होता है । लेकिन कई वेद मन्त्रों में स्पष्ट रूप से लेखन क्रिया का उल्लेख हुआ है । ऋग्वेद में कहा है —

विपुपग्नारया तुव पणेरिन्धि हृदि प्रियम् ।

अथे मत्सम्य रण्य ॥^१

अर्थात् — (पुषन्) हे पोषक ! (आरया) लेखनी की । (वितुद) प्रेरणा दे, जिसमें हम (हृदि) हृदय रूप से । (पणीः प्रियम्) धोले बाजों के कल्याण की इच्छा करें ।

उक्त मंत्र में लेखक परमात्मा की लेखन शक्ति प्रदान करने की प्रार्थना कर रहा है । वह अपने लेख द्वारा ऐसे उच्च विचार प्रकट करना चाहता है, जिससे निरूप्य प्राणियों का भी कल्याण हो जाय अर्थात् उस लेख के पढ़ने से निरूप्य व्यक्ति भी सद् मार्ग पर चलने लगे । इसमें उल्लिखित ‘आरया’ अर्थात् लेखनी शब्द से स्पष्ट हो जाता है कि लेखनी का प्रयोग उस काल में होता था ।

इसी प्रकार एक और मन्त्र :-

भारिख किकिराहणु पणोनान् हृदया वे ।

अथमत्सम्य रण्य ॥^२

अर्थात् — (कवे) हे ! विद्वान् भारिख) अच्छी तरह से तिस और (पणोनान) धोले बाजों के हृदय (किकिराहणु) कम्पायमान कर दे ।

१ - ऋ० सं०, ६।५३।६।

२ - ऋ० सं०, ६।५३।७।

उक्त मन्त्र में भी लिखने का स्पष्ट उल्लेख हो गया है। उसी प्रकार एक और मन्त्र देतिए—

या पूषन् ब्रह्मचोदनीमाराम् विमर्ष्या ग्रहणे ।

तया समस्य हृदयमारिखं किकिराकृणु ॥^१

अर्थात्—(या पूषन्) हैं पोषक (या ब्रह्मचोदनीमाराम्) ज्ञान को प्रचोदित करने वाली (आरा) लेखनी को (विमर्ष्या) ग्रहण कर (तया) उससे (समस्य) समस्त प्राणियों के (हृदय) हृदय में (आरिख) लिख दे वं (किकिराकृणु) कम्पायमान कर दे।

इन मन्त्रों से स्पष्ट हो गया कि ऋग्वैदिक काल से ही भारत में लेखन कला का प्रचार रहा है। अथर्ववेद में गायों के कानों पर मियुन का चिह्न बनाने की प्रथा का वर्णन किया गया है।^२ अथर्ववेद में ही एक अन्य स्थल पर इस प्रथा की हिन्दा भी की गई है।^३ महर्षि वसिष्ठ ने भी अपनी स्मृति में लिखित प्रलेखों को ही प्रामाणिक माना है।^४

इन समस्त प्रमाणों के प्रकाश में यह मानने में कोई आपत्ति नहीं होनी चाहिए कि वैदिक काल में लेखन कला का प्रचार था। वेदों के विद्वान-भूत ने भी यह कहा है कि “इस अनुमान को रोकने के लिए कोई प्रमाण नहीं है कि वैदिक काल में भी लिखित पुस्तकें मौखिक शिक्षा व अन्य अवसरों पर काम में ली जाती थी।” कोयलिंग महोदय का अनुमान है कि “साहित्य के प्रचार में लिखने का उपयोग नहीं होता था परन्तु नए ग्रन्थों के बनाने में उसको काम में लाते थे।” डॉ० राय ने तो दावे के साथ कहा है—“लिखने का प्रचार भारत में प्राचीन समय से ही होना चाहिए, क्योंकि यदि वेदों के लिखित पुस्तक विद्यमान न होते तो कोई पुरुष प्रातिशाख्य बना ही नहीं सकता।”

इन समस्त तथ्यों को देखते हुए हमें यह स्वीकार करना पड़ेगा कि वैदिक काल में लेखन कला का पर्याप्त प्रचार था।

9477

१ - ऋ० सं०, ६, ५३, ७।

२ - अथर्व सं०, ६। १४१।

३ - अथर्व सं०, १२। ४ से ६।

४ - वसिष्ठ स्मृति, १६। १०। १४-१५।

५ - मानव फल्य सूत्र की भूमिका, पृष्ठ ६९।

